

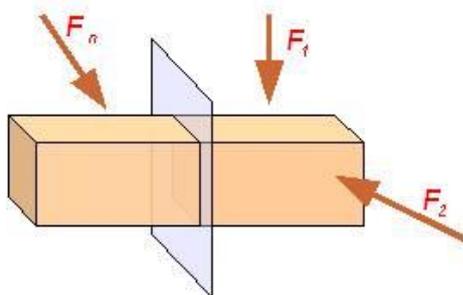
Міністерство освіти і науки України
Відокремлений структурний підрозділ
«Любешівський технічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»



ОПР МАТЕРІАЛІВ

Конспект лекцій

для здобувачів освіти за спеціальністю G 19 Будівництво та
цивільна інженерія,
освітньо-професійної програми «Будівництво та
експлуатація будівель і споруд»
денної форми навчання



Любешів 2025

УДК

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»

_____ Т.П. Герасимик-Чернова

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу

Бібліотекар _____ Н.М. Корець

Затверджено методичною радою ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»

протокол № _____ від « _____ » _____ 2025 р.

Рекомендовано до видання на засіданні циклової методичної комісії викладачів будівельних дисциплін

протокол № _____ від « _____ » _____ 2025р.

Голова циклової методичної комісії _____ С.М. Данилік

Укладач: _____ Т.П. Герасимик-Чернова, викладач-методист,

Рецензент: _____ А.В. Хомич, к.т.н.

Відповідальний за випуск: _____ Т.П. Кузьмич, методист

Опір матеріалів [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня «фаховий молодший бакалавр», з спеціальності *G 19 Будівництво та цивільна інженерія, ОПП «Будівництво та експлуатація будівель споруд»* денної форми навчання / уклад. Т.П. Герасимик-Чернова – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ», 2025. –70 с.

ЗМІСТ

1. ВСТУП.....	4
2. ЛЕКЦІЇ	6-68
3. ЛІТЕРАТУРА	69

ВСТУП

Розвиток будівельної інженерної справи ставить перед фахівцями різних галузей народного господарства складні і різноманітні технічні завдання, пов'язані з проектуванням, виробництвом і експлуатацією машин та споруд.

Велике значення має також проблема економії металу. Затрати на матеріали (переважно на метали) становлять значну частину усіх затрат на машини, тому зменшення ваги машин дасть змогу зменшити трудомісткість їх виготовлення.

Над розв'язанням цих проблем працюють вчені, інженери, техніки та інші фахівці різних галузей. Для успішної роботи технічних кадрів у цьому напрямі потрібна достатня їх загальнотехнічна підготовка ще під час навчання у вищих та середніх навчальних закладах. Важливим у підготовці студентів є вивчення загальних законів механіки.

Основи теоретичної механіки та опору матеріалів в сучасному стані – це широкий комплекс дисциплін, багато з яких фактично виділено із загальної механіки. Ці відгалужені від класичної механіки галузі знань у своїй сукупності дістали назву прикладної (практичної) механіки, тобто вони обслуговують певні галузі. Основними з них є опір матеріалів, будівельна механіка, теорія споруд, деталі машин тощо.

У *опорі матеріалів* розглядають методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій і машин. Метою розрахунку деталей є забезпечення достатньої надійності і довговічності у поєднанні з економічністю.

Розміри деталей визначають з урахуванням реальних властивостей матеріалів, з яких їх виготовлятимуть. Тому потрібні відповідні експериментальні дослідження для визначення характеристик застосованих матеріалів. Крім того, теорію не можна побудувати без експерименту, а експеримент не буде цілеспрямованим без теоретичних основ. Отже, опір матеріалів є не тільки теоретичною, а й експериментальною наукою.

Опор матеріалів є важливою загальнотехнічною дисципліною, від знання якої багато в чому залежить якість професійної підготовки фахівця інженерно-технічного профілю. Програма дисципліни передбачає вивчення загальних законів рівноваги і руху матеріальних тіл; основних методів розрахунку окремих деталей чи вузлів машин на міцність, жорсткість і стійкість; вивчення будови, застосування і основ проектування деталей машин і вузлів загального призначення.

Механіка – одна з найдавніших наук. Термін «механіка» запровадив видатний стародавній філософ Аристотель (384–322 р. до н. е.). На всіх етапах розвитку механіка була тісно пов'язана з розвитком суспільства. Дисципліна розвивалася у тісному зв'язку з практикою. Розвиток її значно залежить від розвитку виробництва і потреб техніки. Водночас механіка сприяла і сприяє технічному прогресові.

Роль опору матеріалів в галузі будівництва зростає внаслідок дальшого ускладнення завдань, пов'язаних з автоматизацією виробничих процесів, в тому числі у будівництві.

Запитання для самоконтролю

1. Для чого потрібно підвищувати ефективність використання машин і зменшувати витрати матеріалів на виготовлення запасних частин?
2. Що вивчають у розділі «Опір матеріалів»?

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Тема 1. Основні положення

План

1. Завдання й методи опору матеріалів. Деформоване тіло. Пружність і пластичність. Попередні поняття про розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість
2. Класифікація навантажень
3. Основні гіпотези і припущення
4. Метод перерізів. Основні види навантаження (деформації) бруса. Напруження повне, нормальне, дотичне

1. Завдання й методи механіки матеріалів. Деформоване тіло. Пружність і пластичність. Попередні поняття про розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість

Механіка матеріалів і конструкцій із моменту свого виникнення завжди була тісно пов'язана з практикою. Виробнича експлуатація машин і засобів механізації постійно висуває все нові завдання, розв'язання яких сприяє розвитку науки про механіку матеріалів і конструкцій, що в свою чергу сприяє розвитку науково-технічного прогресу.

Завданням науки про опір матеріалів є створення наукових основ для прикладних розрахунків окремих частин конструкцій і механізмів машин із урахуванням їх надійності та ресурсозбереження.

Розрахунок під час проектування забезпечує створення надійних, міцних та легких конструкцій.

Значно ускладнювалося би завдання під час конструювання машин і механізмів, коли б доводилося розв'язувати кожне питання шляхом експериментування.

Однак, було б помилковим вважати, що механіка матеріалів і конструкцій – це суто теоретична наука. Оскільки ця наука має справу з міцністю і жорсткістю реальних елементів і систем, виготовлених із існуючих конструктивних матеріалів, методи науки про механіку матеріалів і конструкцій мають ґрунтуватися на вивченні та пізнанні справжніх властивостей цих матеріалів, тобто на відповідно поставлених експериментах.

Таким чином, механіка матеріалів і конструкцій є не тільки теоретичною, а й експериментальною наукою, її теоретичні положення засновані на законах механіки твердого тіла: на умовах рівноваги, законах додавання сил, теоремах про моменти сил, на принципі можливих переміщень і т. інше. Разом із тим розв'язок будь-якої задачі механіки матеріалів і конструкцій починається з припущень, які ґрунтуються на наслідках

експериментальних досліджень, і закінчується перевіркою одержаних результатів розрахунків у лабораторії.

Реальні тіла внаслідок дії зовнішніх сил змінюють свою форму та розміри.

Зміна форми та розмірів тіла називається **деформацією**.

Деформація, яка зникає повністю після припинення дії зовнішніх сил, називається **пружною**. Деформація, яка після припинення дії зовнішніх сил не зникає, називається **залишковою**. Залишкові деформації в елементах машин і споруд, як правило, не допускаються. Під час проектування елементів конструкцій їх розміри мають бути такими, щоб не виникали залишкові деформації.

Здатність тіл відновлювати свою початкову форму і розміри після припинення дії зовнішніх сил називається **пружністю**.

Відомо, що в природі немає зовсім пружних тіл, тобто таких, у яких після припинення дії зовнішніх сил повністю зникають деформації.

Проте деякі матеріали (сталь, дерево та ін.), за своїми властивостями подібні до таких тіл, якщо зовнішні сили не перевершують певної границі (границі пружності), встановленої для них дослідним шляхом. Перевищення цієї границі веде до виникнення залишкових деформацій.

Конструювання та розрахунок механізмів, деталей машин або інженерних споруд тісно пов'язані між собою. Тобто, конструювання передбачає детальне розроблення задуму, ідеї у вигляді креслеників певних конструкцій, що мають бути виготовлені з обраних конструкційних матеріалів, а метою розрахунку конструкцій є ретельна **перевірка їх на міцність, жорсткість і стійкість**.

Міцність – це здатність матеріалу конструкції і їх елементів чинити опір дії зовнішніх сил без появи пластичних деформацій і руйнування.

Розрахунки на міцність дають змогу визначити розміри і форму деталі, що визначають задане навантаження за найменших витрат матеріалів.

Жорсткість – це здатність тіла або конструкції протидіяти деформації.

Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розмірів конструкції і їх елементів не перевищать допустимих норм.

Стійкість – це здатність конструкції протидіяти зусиллям, які намагаються вивести її з початкового стану рівноваги.

Розрахунки на стійкість запобігають можливості раптової втрати стійкості і викривлення довгих або тонких деталей.

Механіка матеріалів і конструкцій – це наука про міцність окремих частин конструкцій і машин, яка ґрунтується на результатах набуток практичного досвіду із використанням сучасних методів моделювання.

2. Класифікація навантажень

Зовнішні сили, які діють на конструкцію класифікують за кількома ознаками.

1. Залежно від місця прикладання:

- поверхневі сили, які діють на поверхні елемента (тиск рідини на стінки гідравлічного циліндра механізму навіски енергетичного засобу);
- об'ємні сили, прикладені до кожної точки об'єму елемента (сили ваги добрив у бункері розкидача, інерційні сили).

2. Залежно від розміру площі дії:

- зосереджені сили, що діють на площу, розмір якої малий порівняно з величиною елемента (тиск колеса вагона на рейку);
- розподілені навантаження, які безперервно діють на деяку площу елемента (тиск води на греблю).

3. Залежно від тривалості дії:

- постійні навантаження, які діють протягом всього часу роботи конструкції (власна вага конструкції);
- тимчасові навантаження, які діють лише певний час (вага автомобіля, який проїжджає на мосту).

4. За характером дії:

- статичні сили, які, діючи на елемент, зростають поступово від нуля до кінцевої величини;
- динамічні сили, дія яких спричиняє в елементах значні прискорення; до них належать інерційні, ударні, повторно-періодичні та вибухові сили.

3. Основні гіпотези і припущення

Під час вивчення напруженого стану реальних тіл виникають труднощі, зумовлені різноманітністю фізичних і механічних властивостей матеріалів. У зв'язку з цим теорію розрахунку доводиться будувати на певних гіпотезах і припущеннях.

Основні гіпотези і припущення

1. *Гіпотеза плоских перерізів.* Плоскі перерізи, проведені в тілі до деформації, залишаються плоскими і після деформації.

2. *Гіпотеза про суцільність тіл.* Весь об'єм тіл суцільно заповнений речовиною або матерією.

3. *Припущення про малість деформацій.* Деформації тіл, зумовлені дією зовнішніх сил, малі порівняно з їх розмірами, тобто тіла незначно змінюють свою форму, що дає можливість застосувати принцип незалежності дії сил та інші теореми механіки твердого тіла.

4. *Припущення про однорідність тіл.* Фізичні та механічні властивості тіла в усіх точках і за всіма напрямками однакові. Однорідні тіла (матеріали), які мають однакові фізичні та механічні властивості за всіма напрямками, називають ізотропними. Тіла, які не мають властивостей ізотропності, називають анізотропними. До них можна віднести деревину і синтетичні матеріали.

5. *Принцип Сен-Венана.* У точках тіла, досить віддалених від місць прикладання навантажень, внутрішні сили майже не залежать від способу прикладання сил. Цей принцип дає змогу спростити розрахунки, замінюючи одну систему сил її еквівалентною, але легко визначеною з умов рівноваги.

6. *Принцип незалежності дії сил.* Результат дії на тіло системи сил дорівнює сумі результатів дії тих самих сил, які прикладаються до тіла, причому в будь-якому порядку.

4. Метод перерізів. Основні види навантаження (деформації) бруса. Напруження повне, нормальне, дотичне

Для розрахунків деталей машин і споруд на міцність потрібно знати внутрішні сили пружності, які виникають як результат дії прикладених до деталей зовнішніх сил. Виникнення внутрішніх сил супроводжується деформацією матеріалу. Ці сили протидіють зовнішнім силам і намагаються відновити попередню форму тіла.

Під час визначення внутрішніх сил користуються методом перерізів.

Метод перерізів полягає в тому, що тіло уявно розрізають площиною (рис. 1) на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання; залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил.

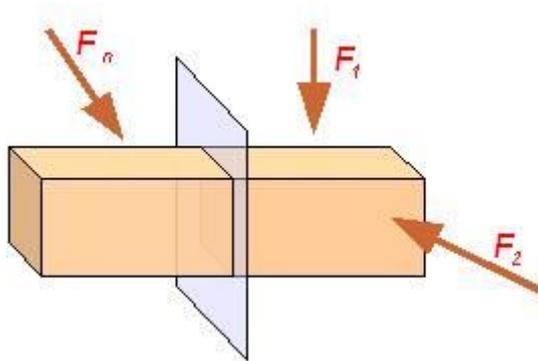


Рис. 1

Очевидно, що за третім законом Ньютона (аксіома взаємодії) внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної і відкинутої частин тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямком. Таким чином, розглядаючи рівновагу будь-якої з двох частин розрізаного тіла, дістанемо одне й те саме значення внутрішніх сил, але зручніше розглядати ту частину тіла, для якої рівняння рівноваги будуть простіші.

У загальному випадку навантаження на залишену частину тіла діє просторова система сил. Для визначення внутрішніх сил можна скласти шість рівнянь рівноваги, із кожного із них визначити по одному невідомому. Можна

зробити висновок, що внутрішні сили еквівалентні шести внутрішнім силовим факторам.

Шість внутрішніх силових факторів, які виникають у поперечному перерізі бруса в загальному випадку (рис. 2), мають назви: N – поздовжня сила, Q_x , Q_y – поперечні сили, M_k – крутний момент, M_{zx} , M_{zy} – згинальні моменти.

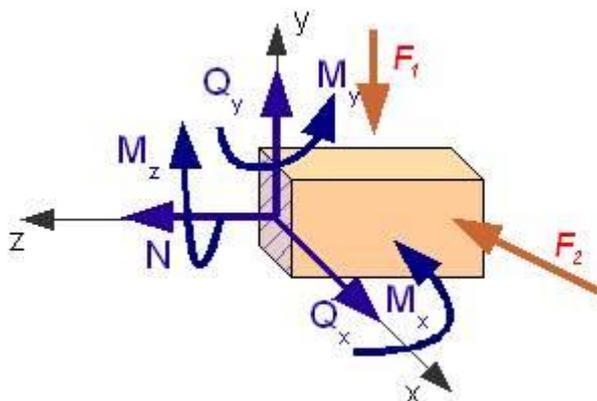


Рис. 2

За різних деформацій у поперечному перерізі бруса виникають різні внутрішні силові фактори. Розглянемо окремі випадки.

1. У перерізі виникає лише поздовжня сила N . У цьому випадку буває деформація розтягу (якщо сила N спрямована від перерізу) або деформація стиску (якщо сила N спрямована до перерізу).

2. У перерізі виникає лише поперечна сила Q . У цьому випадку буває деформація зсуву.

3. У перерізі виникає лише крутний момент M_k . Тоді буває деформація кручення.

4. У перерізі виникає лише згинальний момент M_z . Тоді буває деформація чистого згину. Якщо в перерізі одночасно виникає згинальний момент M_z і поперечна сила Q , то згин називають поперечним.

Якщо в перерізі одночасно виникає кілька внутрішніх силових факторів (наприклад, згинальний і крутний моменти або згинальний момент і поздовжня сила), то в цих випадках трапляється поєднання основних деформацій.

Поряд з поняттям деформації одним з основних понять опору матеріалів є напруга. Напруга характеризує інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.

Напруга – це внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу.

$$p = \frac{N}{A} = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \frac{H}{\text{м}^2} = \text{Па}(\text{паскаль})$$

Оскільки Па дуже мала одиниця напруги, то використовують МПа (мегапаскаль):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

Напруга – величина векторна.

Вектор повної напруги p розкладається на дві складові:

σ – нормальну напругу, перпендикулярну до площини перерізу;

τ – дотичну напругу, таку, що лежить у площині перерізу.

Модуль повної напруги визначається за формулою $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Розкладання повної напруги на нормальну і дотичну має цілком визначений фізичний смисл. У поперечних перерізах бруса у випадку розтягу, стиску і чистого згину діють тільки нормальні напруги, а в разі зсуву і кручення – тільки дотичні.

Напруги, за яких матеріал руйнується, називаються *границею міцності*.

Запитання для самоконтролю

1. Укажіть основні завдання і методи механіки матеріалів і конструкцій.
2. Що називають деформацією?
3. Які існують деформації?
4. Що таке пружність і які деформації називають пружними?
5. Що називають міцністю?
6. Що називають жорсткістю?
7. Що називають стійкістю?
8. Сформулюйте гіпотезу про суцільність тіл.
9. Сформулюйте припущення про малість деформацій.
10. Сформулюйте припущення про однорідність тіл.
11. Сформулюйте принцип Сен-Венана.
12. Сформулюйте принцип незалежності дії сил.
13. З якими ознаками класифікують зовнішні сили?
14. У чому полягає суть методу перерізів?
15. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечних перерізах бруса?
16. Що називають напругою?
17. На які напруги розкладається повна напруга?

Тема 2. Розтяг і стиск

План

1. Поздовжні сили та їх епюри
2. Нормальні напруження в поперечних перерізах та їх епюри
3. Поздовжні та поперечні деформації під час розтягу (стиску). Закон Гука. Модуль поздовжньої пружності, коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона). Жорсткість перерізів та жорсткість бруса під час

розтягу і стиску. Визначення осьових переміщень поперечних перерізів бруса

4. Експериментальне дослідження розтягу й стиску матеріалів

5. Коефіцієнт запасу міцності за статичного навантаження на границі міцності та границі текучості

6. Допустимі напруження. Розрахунки на міцність: перевірка міцності, визначення допустимого навантаження, визначення необхідних розмірів поперечного перерізу

1. Поздовжні сили та їх епюри

Центральний розтяг або стиск стрижня виникає під дією сил, прикладених до його кінців і спрямованих уздовж осі бруса. Під час деформації розтяг або стиск у будь-якому поперечному перерізі виникає тільки поздовжня сила N .

Для визначення значення поздовжньої сили в поперечному перерізі бруса застосовують метод перерізів.

Поздовжня сила – це рівнодіюча внутрішніх нормальних сил, які виникають у поперечному перерізі бруса. Тому *поздовжня сила в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розміщених по один бік перерізу*. Розтяжні поздовжні сили вважатимемо додатними, а стискальні – від’ємними.

2. Нормальні напруження в поперечних перерізах та їх епюри

Лабораторні дослідження показали, що для розтягу справедлива гіпотеза плоских перерізів і, отже, всі волокна бруса видовжуються на одну і таку саму величину. Це дає змогу зробити висновок про те, що під час розтягу і стиску в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруги, які рівномірно розподілені у перерізі; їх обчислюють за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

де: N – поздовжня сила;

A – площа поперечного перерізу.

Очевидно, що для розтягу і стиску форма перерізу на величину напруги не впливає.

У перерізах, близьких до точок прикладання сил, закон розподілу напруг буде складнішим, але, користуючись принципом пом’якшення граничних умов, нехтуватимемо цими відхиленнями і вважатимемо, що у всіх перерізах бруса напруги розподілені рівномірно і що в перерізі, де до бруса прикладено вздовж осі зосереджену силу, значення поздовжньої сили і напруг змінюються стрибкоподібно.

Для наочного зображення вздовж осі бруса поздовжніх сил і нормальних напруг будують графіки, які називають *епюрами*.

Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень ступінчастого бруса, зображеного на рис. 1.

Розв'язок. Розділимо брус на ділянки і пронумеруємо їх, як показано на рис. 1. Межами ділянок є точки прикладання зовнішніх сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу. Цей брус складається з трьох ділянок.

Для побудови епюри поздовжніх сил N під рисунком бруса проведено вісь або базу епюри, паралельну осі бруса, і штриховими лініями обмежимо його ділянки. Величини поздовжніх сил у довільному масштабі відкладемо перпендикулярно до осі епюри, причому додатні значення N (розтяг) відкладаємо вгору, а від'ємні (стиск) – донизу від осі. Епюру штрихуємо тонкими лініями, перпендикулярними до осі. Лінія штрихування в масштабі (ордината графіка) дає значення поздовжньої сили у відповідному поперечному перерізі бруса.

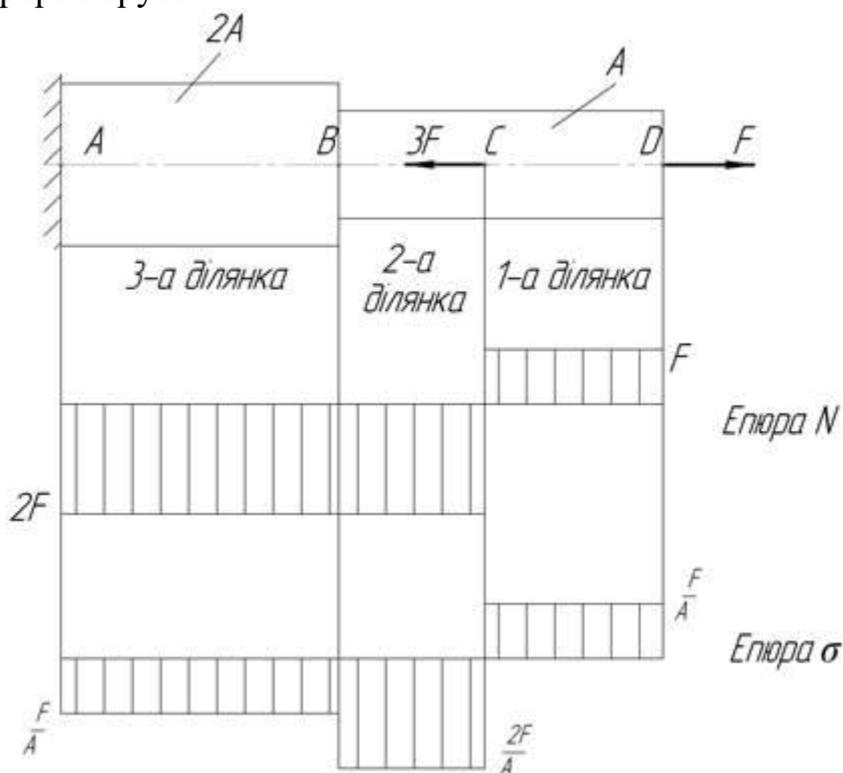


Рис. 1

У точках прикладання зосереджених сил на епюрі N відбуваються стрибкоподібні зміни, причому величина «стрибка» дорівнює модулю прикладеної в перерізі бруса зовнішньої зосередженої сили.

Перейдемо до побудови епюри N . Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах першої ділянки діє поздовжня сила $N_1 = F$. Відкладемо вгору від осі епюри величину F у довільному масштабі і проведемо пряму, паралельну осі епюри. У точці C бруса прикладено силу $3F$. Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах

другої і третьої ділянок діє поздовжня сила $N_2 = N_3 = -2F$ і епюра буде горизонтальною лінією, яка проходить на $2F$ нижче від осі епюри.

Очевидно, що значення ординати епюри поздовжніх сил під закріпленням дорівнює реакції закріплення. Зазначимо, що за методом перерізу зручніше розглядати рівновагу частини бруса, розміщеної з боку його вільного кінця, у протилежному разі треба заздалегідь визначити і вводити в рівняння рівноваги реакцію закріплення.

Щоб побудувати епюру σ , визначимо нормальні напруження на ділянках бруса, беручи відношення значення поздовжньої сили (з епюри N) до площі поперечного перерізу. Тоді:

- на першій ділянці нормальні напруження будуть $\sigma_1 = \frac{F}{A}$,
- на другій $\sigma_2 = \frac{2F}{A}$,
- на третій $\sigma_3 = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}$.

Правила побудови епюри σ такі самі і для епюри N , зокрема і правило знаків.

У межах кожної ділянки напруження сталі, тому епюра σ на кожній ділянці паралельна осі.

У розрахунках на міцність звертають особливу увагу на ті перерізи бруса, в яких напруження за абсолютним значенням максимальні. Ці перерізи можуть бути небезпечними. У цьому прикладі такими є перерізи бруса на другій ділянці.

3. Поздовжні та поперечні деформації під час розтягу (стиску). Закон Гука. Модуль поздовжньої пружності, коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона). Жорсткість перерізів та жорсткість бруса під час розтягу і стиску. Визначення осьових переміщень поперечних перерізів бруса

Розглянемо деформації. Під дією прикладених розтяжних сил стрижень видовжується на деяку величину Δl . Якщо позначити початкову довжину через l , то *абсолютне видовження* визначиться з виразу: $\Delta l = l_1 - l$,

де l_1 – довжина стрижня після деформації.

Абсолютне видовження вимірюється в одиницях довжини (мм, см).

Для зручності порівняння деформацій застосуємо поняття про *відносне*

видовження, яке дорівнює: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Відносне видовження число абстрактне, іноді його подають у відсотках $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%$.

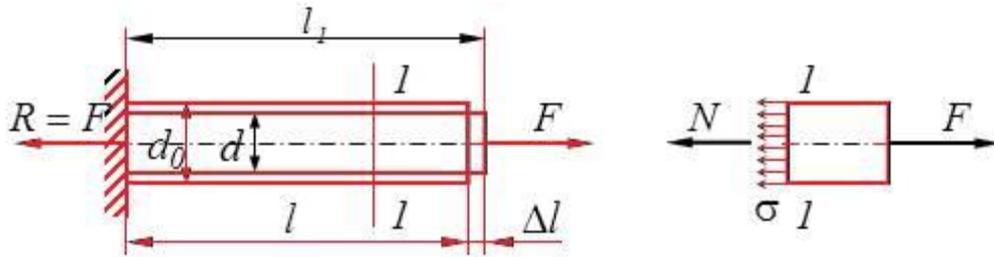


Рис. 2. Модель розтягу бруса

Якщо розглядати тільки пружні деформації бруса, то для них дослідним шляхом можна встановити залежність між напруженням і відносним видовженням. Ця залежність називається законом Гука. **Закон Гука** для розтягу і стиску справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: *нормальна напруга прямо пропорційна відносному видовженню або укороченню*.

Залежність можна записати у вигляді рівності $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Коефіцієнт пропорційності E характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду, вимірюється в (паскалях) Па.

Якщо у формулу закону Гука підставити $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, $\sigma = \frac{N}{A}$, то дістанемо формулу для визначення абсолютного видовження або укорочення бруса:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

Добуток EA у знаменнику називають жорсткістю перерізу під час розтягу і стиску; він характеризує одночасно фізико-механічні властивості матеріалу і геометричні розміри поперечного перерізу бруса.

Для бруса, що має кілька ділянок, які відрізняються матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною поздовжньої сили, зміна довжини всього бруса дорівнює алгебраїчній сумі видовжень і укорочень окремих ділянок:

$$\Delta l = \sum \Delta l_k$$

Стрижні, на які діють розтяжні або стискальні сили, як показали досліди, зазнають не тільки поздовжньої, а й поперечної деформації. Відносна поперечна деформація дорівнює:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$

де: d – початковий поперечний розмір,

Δd – зміна поперечного розміру.

Залежність між відносною поперечною ε' і відносною поздовжньою ε деформаціями вперше встановив французький учений Пуассон (1781–1840).

$\mu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|}$ коефіцієнт Пуассона, залежить від властивостей матеріалу і лежить у межах від 0 (корок) до 0,5 (парафін); для сталі $\mu = 0,25 \dots 0,33$, для чавуна $\mu = 0,23 \dots 0,27$.

4. Експериментальне дослідження розтягу й стиску матеріалів

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі величини E і μ потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків проєктованих деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу.

Найбільш поширеніше і важливіше механічне випробування на розтяг маловуглецевої сталі (наприклад, сталі Ст.3) за статичного навантаження.

У процесі цього випробування спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму, яка показує залежність між розтяжною силою і абсолютним видовженням, тобто в координатах $(F, \Delta l)$. Для вивчення механічних властивостей матеріалу незалежно від розмірів зразка застосовують діаграму в координатах «напруга – відносне видовження» (σ, ε) . Ці діаграми відрізняються одна від одної лише масштабами. Діаграму розтягу маловуглецевої сталі подано на рис. 3. Ця діаграма має такі характерні точки. Точка А відповідає границі пропорційності. **Границею пропорційності** σ_p називають таку найбільшу напругу, до якої деформації зростають пропорційно навантаженню, тобто відповідно до закону Гука (для сталі Ст.3 $\sigma_p = 200$ МПа).

Точка А практично відповідає й іншій границі, яку називають границею пружності. **Границею пружності** σ_{pr} називають таку найбільшу напругу, до якої деформації практично залишаються пружними.

Точка С відповідає границі текучості. **Границею текучості** $\sigma_{т}$ називають таку напругу, за якої у зразку виникає помітне видовження без збільшення навантаження (для сталі Ст.3 $\sigma_{т} = 240$ МПа).

Коли деформація досягає границі текучості, поверхня зразка стає матовою, бо на ній появляється сітка **ліній Людерса-Чернова**, нахилених до осі під кутом 45° . Ці лінії вперше в 1859 р. описали німецький металург Людерс і незалежно від нього в 1884 р. російський металург Д.К. Чернов (1839–1921), який запропонував використовувати їх для експериментального вивчення напруг у складних деталях.

Границя текучості – це основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів.

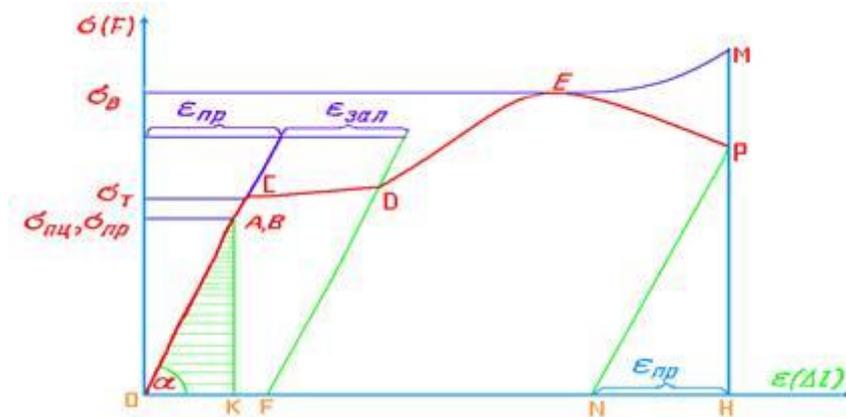


Рис. 3

Точка В відповідає тимчасовому опору або границі міцності.

Тимчасовим опором σ_m називають умовну напругу, що дорівнює відношенню максимальної сили, яку витримує зразок, до початкової площі його поперечного перерізу (для сталі Ст.3 $\sigma_m = 400$ МПа). Коли деформація досягає тимчасового опору, то на розтягнутому зразку утворюється місцеве звуження – шийка, тобто починається руйнування зразка. В означенні тимчасового опору йдеться про умовну напругу, оскільки в перерізах шийки напруги будуть більшими.

Границею міцності σ_m називають тимчасовий опір зразка, який руйнується без утворення шийки. Границя міцності є основною механічною характеристикою для оцінювання міцності крихких матеріалів.

Точка D відповідає напрузі, яка виникає у зразку в момент розриву усіх поперечних перерізів, крім перерізу шийки.

Точка M відповідає напрузі, яка виникає у найменшому поперечному перерізі шийки в момент розриву. Цю напругу можна назвати напругою розриву.

Деформація зразка за границею пружності складається з **пружної** і **залишкової**, причому пружна частина деформації підлягає закону Гука й за границею пропорційності (рис. 3). Якщо навантаження зняти, то зразок скоротиться відповідно до прямої TF діаграми. За повторного навантаження того самого зразка його деформація відповідатиме діаграмі FTBD. Отже, за повторного розтягування зразка, раніше навантаженого більше, ніж границя пружності, механічні властивості матеріалу змінюються, а саме: підвищується міцність (границя пружності і пропорційності) і зменшується пластичність. Це явище називають **наклепом**.

Іноді наклеп небажаний (наприклад, під час пробивання отворів під заклепки збільшується можливість виникнення тріщин біля отворів). В інших випадках наклеп створюють навмисно (наприклад, ланцюги підймальних машин, арматуру залізобетонних конструкцій, проводи, троси попередньо

витягують за границю текучості). Дріт, який витягують волочінням, як результат наклепу має значно більшу міцність, ніж точений зразок з того самого матеріалу.

Ступінь пластичності матеріалу можна охарактеризувати величиною (у відсотках) залишкового відносного видовження δ і залишкового відносного звуження ψ шийки зразка після розриву:

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100; \psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \cdot 100,$$

де: l_0 – початкова довжина зразка;

l_p – довжина зразка після розриву;

A_0 – початкова площа поперечного перерізу зразка,

$A_{ш}$ – площа найменшого поперечного перерізу шийки зразка після розриву.

Що більші δ і ψ , то пластичніший матеріал. Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. Діаграма розтягу крихких матеріалів не має переходу текучості, в них під час руйнування шийка не утворюється.

Діаграма стиску сталі до границі текучості збігається з діаграмою розтягу, до того ж результати випробування сталі на розтяг і стиск однакові. Результати випробувань на розтяг і стиск чавуну значно відрізняються; границя міцності на розтяг у 3–5 разів менша, ніж на стиск. Інакше кажучи, чавун значно гірше працює на розтяг, ніж на стиск.

Чітко виражену площадку текучості мають лише діаграми розтягу маловуглецевої сталі і деяких сплавів кольорових металів. На рис. 4 показано для порівняння діаграми розтягу сталей з різним умістом вуглецю; з рисунка видно, що із збільшенням відсотка вмісту вуглецю зростає міцність сталі і зменшується її пластичність.

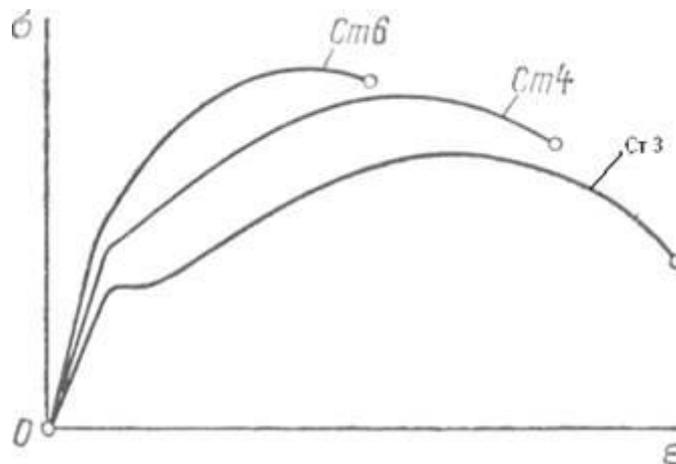


Рис. 4

Для пластичних матеріалів, діаграми розтягу яких не мають чітко вираженої ділянки текучості (середньо- і високовуглецеві, леговані сталі) або зовсім її не мають (мідь, дюралюміній), вводиться поняття умовної границі

тежкості – напруги, за якої відносне залишкове видовження зразка дорівнює 0,2 %. Умовну границю тежкості також позначатимемо σ_T (іноді її позначають $\sigma_{0,2}$).

Поділ матеріалів на пластичні і крихкі цілком умовний, оскільки залежно від характеру діючого навантаження крихкий матеріал може набути пластичних властивостей і, навпаки, пластичний матеріал набуває властивостей крихкого. Так, наприклад, деталь з пластичного матеріалу за низької температури або ударного навантаження руйнується без утворення шийки, як крихка.

5. Коефіцієнт запасу міцності за статичного навантаження на границі міцності та границі тежкості

У заводських умовах часто треба перевірити міцність деталі, наприклад для контролю правильності проведеної термообробки. Вирізати зразок з виготовленої деталі, як правило, неможливо, тому для непрямого визначення міцності матеріалу застосовують випробування на твердість.

Твердістю називається властивість матеріалу протидіяти прониканню в його поверхню більш твердого тіла – наконечника (індентора).

Для визначення твердості використовують методи Бринеля, Роквела та Вікерса.

Числом твердості за **Бринелем** HB є відношення сили, з якою загартована кулька тисне на поверхню зразка, до площини A одержаного при

цьому відбитка:
$$HB = \frac{F}{A}$$

Під час випробування за методом **Роквела** у поверхню зразка вдавлюється гострий алмазний конус (шкала C) або сталевий загартований кулька (шкала B). З урахуванням значень сили F і глибини проникнення у зразок конуса (кульки) від двох послідовних навантажень за шкалою приладу визначається число твердості за Роквелом HR_C (HR_B).

Між числом твердості та границею міцності для кожного матеріалу існує експериментально підтверджена залежність. Так, для вуглецевої сталі $\sigma_B = (0,35 - 0,4)HB$.

Як результат механічних випробувань визначаються граничні (небезпечні) напруження $\sigma_{не}$, за яких може порушитися працездатність конструкції. За небезпечне напруження за статичного навантаження для пластичних матеріалів можна прийняти границю тежкості σ_m , а для крихких – границю міцності на розтяг σ_m^+ чи на стиск σ_m^- . Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, що виникають у них у процесі експлуатації, були меншими від небезпечних з певним запасом.

Максимальне безпечне напруження називається **допустимим**. Воно визначається як відношення небезпечного напруження до нормативного (призначеного нормами проектування конструкцій) **коефіцієнта запасу**:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{нб}}{[n]} .$$

Нормативний коефіцієнт запасу $[n]$ лежить у широких межах 1,5–5. Його значення залежить від умов роботи деталі, точності методів розрахунку, властивостей матеріалу, призначення конструкції та інших факторів. Більш детальні рекомендації щодо нормативного коефіцієнта запасу наводяться у спеціальній довідниковій літературі залежно від галузі техніки, досвіду проектування та експлуатації машин певного типу.

6. Допустимі напруження. Розрахунки на міцність: перевірка міцності, визначення допустимого навантаження, визначення необхідних розмірів поперечного перерізу

Умова міцності. Міцність стрижня під час осьового розтягу і стиску забезпечена, якщо для кожного його поперечного перерізу найбільше розрахункове (робоче) напруження σ не перевищує допустимого $[\sigma]$:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] .$$

Допустимі напруження – це максимальні значення напружень, за яких забезпечується надійна робота конструкції:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{гран}}{[n]} ,$$

де: $\sigma_{гран}$ – граничні напруження (напруження, за яких відбувається порушення роботи або руйнування деталей конструкції), для конструкцій з пластичних матеріалів граничним напруженням є межа текучості σ_m , а для крихких матеріалів – це межа міцності σ_m ;

$[n]$ – допустимий (мінімально необхідний) коефіцієнт запасу міцності.

Для конструкцій з пластичних матеріалів допустимі напруження на розтяг і стиск однакові, тому для них σ – найбільше за абсолютною величиною напруження. Крихкі матеріали значно гірше працюють на розтяг, ніж на стиск:

$$[\sigma_{ст}] \approx 3-5[\sigma_p],$$

де: $[\sigma_{ст}]$ – допустиме напруження стиску;
 $[\sigma_p]$ – допустиме напруження розтягу.

Умова міцності для крихкого матеріалу:

$$\sigma_{ст} \leq [\sigma_{ст}] \quad \sigma_p \leq [\sigma_p],$$

де $\sigma_{ст}$, σ_p – найбільші розрахункові напруження стиску і розтягу.

Залежно від мети розрахунку можна виконати три види розрахунків на міцність:

1) Перевірка міцності (перевірний розрахунок) – за заданої поздовжньої сили N і площі поперечного перерізу A визначають робоче (розрахункове) напруження порівнюють його з допустимим:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

Допускається недовантаження до 5 %, перевантаження до 10 %.

2) Підбір поперечного перерізу (проектний розрахунок) – за відомих поздовжньої сили N і допустимого напруження $[\sigma]$ визначають необхідні розміри перерізу:

$$A = \frac{N}{[\sigma]}$$

3) Визначення допустимого навантаження:

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називають поздовжньою силою?
2. Чому чисельно дорівнює поздовжня сила?
3. Які напруження виникають у поперечних перерізах бруса під час розтягу і стиску?
4. За якою формулою визначають нормальні напруження?
5. Що називають епюрами і для чого їх будують?
6. Який переріз бруса називають небезпечним?
7. Що називають абсолютним видовженням, як його визначити?
8. Що називають відносним видовженням, як його визначити?
9. Сформулюйте закон Гука для розтягу і стиску.
10. Що називають модулем пружності?
11. Що називають жорсткістю перерізу, що вона характеризує?
12. Що називають відносною поперечною деформацією?
13. Від чого залежить коефіцієнт Пуассона?
14. Чому дорівнює абсолютна деформація для бруса з різними ділянками?
15. Що називають границею пропорційності?
16. Що називають границею пружності?
17. Що називають границею текучості?
18. Що називають границею міцності?

19. Яка деформація називають пружною і залишковою?
20. Яке явище називають наклепом?
21. Чим характеризують ступінь пластичності матеріалу?
22. Що називають твердістю матеріалу?
23. За якими методами визначають твердість матеріалу?
24. Яке напруження називають допустимим?
25. Що називають нормативним коефіцієнтом запасу міцності?
26. Сформулюйте умову міцності під час розтягу і стиску.
27. Як визначити допустиме напруження?
28. У чому полягає суть перевірного розрахунку?
29. У чому полягає суть проектного розрахунку?
30. Як визначається допустиме навантаження під час розтягу і стиску?

Тема 3. Практичні розрахунки на зріз і зминання

План

1. Чистий зсув
2. Закон Гука для зсуву. Модуль зсуву. Залежність між трьома пружними постійними для ізотропного тіла
3. Зріз. Основні припущення та розрахункові формули
4. Зминання, умовності розрахунку, розрахункові формули

1. Чистий зсув

Зсувом називають такий вид деформації, за якої в будь-якому поперечному перерізі виникає лише поперечна сила.

Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад під час різання ножицями металевих штаб або прутків.

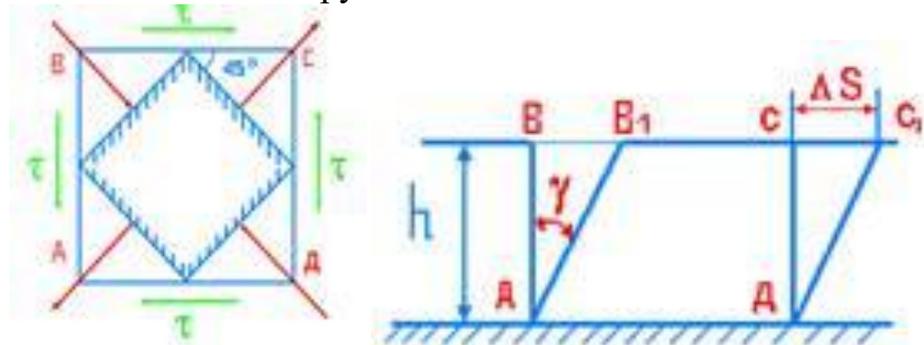


Рис. 1

Під час визначення напруг на похилих площадках у розтягнених або стиснених брусах визначено, що в цих перерізах виникають, крім нормальних, дотичні напруги. Останні намагаються зсунути одну частину бруса відносно другої.

Розглянемо паралелепіпед, який закріплений нижньою гранню і на який діє сила Q (рис. 1).

Під дією сили грань ab переміститься в положення $a'b'$.

Коли на площадки елемента діють тільки дотичні напруги, в ньому виникають деформації **чистого зсуву**.

Лінійне переміщення aa' називається абсолютним зсувом. Відношення абсолютного зсуву $aa' = \frac{\Delta S}{h}$ до висоти паралелепіпеда h називається **відносним зсувом**, тобто:

$$\frac{\Delta S}{h} = \operatorname{tg} \gamma$$

Внаслідок малої величини кута тангенс можна замінити кутом. Отже, мірою відносного зсуву є кут γ .

2. Закон Гука для зсуву. Модуль зсуву. Залежність між трьома пружними постійними для ізотропного тіла

На основі дослідних і теоретичних досліджень встановлено, що для багатьох матеріалів у границях пружності існує лінійна залежність між дотичними напругами і відносним зсувом. Цю залежність називають **законом Гука для зсуву**, її записують у такому вигляді:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G – модуль пружності за зсуву (модуль зсуву).

Орієнтовні значення модуля зсуву:

- для сталі – $8 \cdot 10^4$ МПа;
- для чавуну – $4,5 \cdot 10^4$ МПа.

Отже, дотичні напруги за зсуву прямо і порційні куту зсуву:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Ця формула виражає теоретичну залежність між модулем пружності за зсуву та модулем пружності за розтягу через коефіцієнт Пуассона.

3. Зріз. Основні припущення та розрахункові формули

Деталі, які служать для з'єднання окремих елементів машин чи будівельних конструкцій (штифти, заклепки, болти, шпонки (рис. 2а,б,в,г), у багатьох випадках сприймають навантаження, перпендикулярні до їх поздовжньої осі.

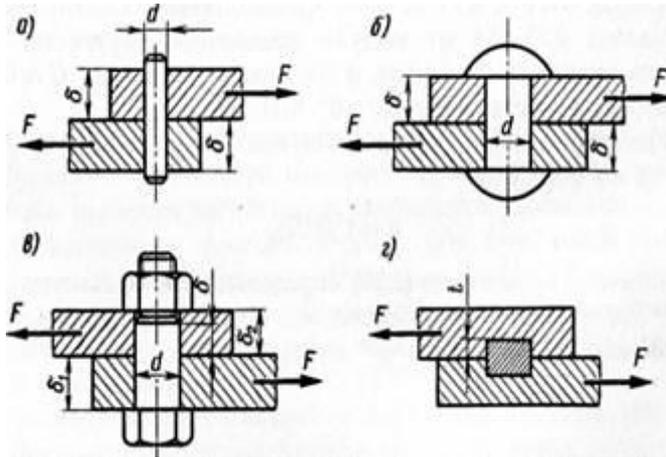


Рис. 2

Практичні розрахунки таких деталей базуються на таких **припущеннях**:

- 1) в поперечному перерізі виникає тільки один внутрішній силовий фактор – поперечна сила Q ;
- 2) дотичні напруги, які виникають у поперечному перерізі розподіляються на його площі рівномірно;
- 3) у випадку, якщо з'єднання виконане декількома однаковими деталями, вважаємо, що всі вони навантажені однаково.

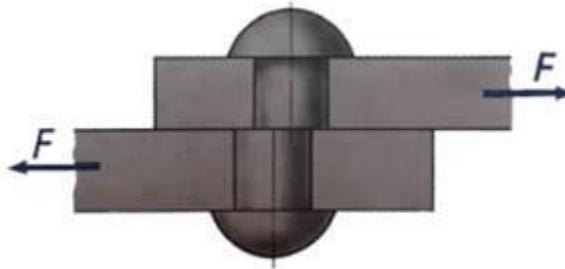


Рис. 3

Руйнування з'єднувальних деталей (у випадку недостатньої міцності) відбувається як результат перерізання вздовж площини, яка співпадає з поверхнею дотикання з'єднаних деталей (рис. 3). Тому говорять, що ці елементи працюють на зріз.

Умова міцності на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{Q}{A_{зр}} \leq [\tau_{зр}]$$

де: $\tau_{зр}$ – розрахункова напруга зрізу;
 Q – поперечна сила;
 $A_{зр}$ – площа зрізу однієї деталі;
 $[\tau_{зр}]$ – допустима напруга зрізу.

У машинобудуванні під час розрахунків штифтів, болтів, шпонок тощо приймають

$$[\tau_{зр}] = (0,25 \div 0,35) \cdot \sigma_m = (0,6 \div 0,8) \cdot [\sigma_p],$$

де $\sigma_m, [\sigma_p]$ – границя текучості та допустима напруга розтягу відповідно для матеріалу деталі.

Розрахунок на зріз забезпечує міцність з'єднання елементів але не гарантує надійність конструкції взагалі.

4. Зминання, умовності розрахунку, розрахункові формули

Коли деталі конструкцій, які передають значне стискальне навантаження, мають невелику площу контакту, то поверхні цих деталей можуть **з м и н а т и с я**. Щоб не сталося зминання, під гайки і головки болтів, наприклад, підкладають шайби. Для спрощення розрахунків вважають, що за площинного контакту виникають нормальні напруги зминання, що рівномірно розподілені на площі контакту. **Розрахункове рівняння на зминання** має вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{i \cdot A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}],$$

де: F – стискальна сила;

$[\sigma_{зм}]$ – допустима напруга на зминання;

$A_{зм}$ – площа зминання;

i – кількість деталей у з'єднанні.

Якщо дотичні деталі виготовлені з різних матеріалів, то на зминання перевіряють м'якший матеріал.

Для двох деталей, які контактують циліндричними поверхнями (наприклад, заклепочне з'єднання), закон розподілу напруг зминання на поверхні контакту складний, рис. 4.

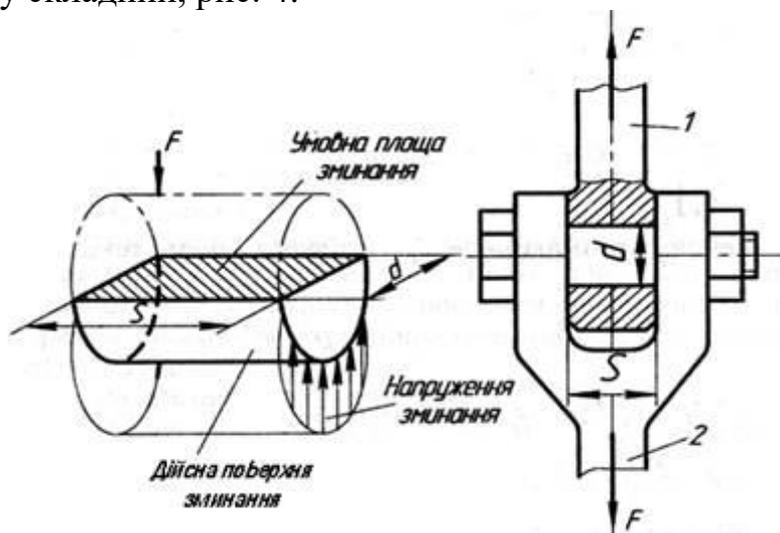


Рис. 4

Тому в розрахункову формулу зминання циліндричних отворів підставляють не площу бокової поверхні півциліндра, за якою контактують деталі, а значно меншу площу діаметрального перерізу отвору (умовна площа зминання); тоді $A_{зм} = d \cdot s$,

де: d – діаметр отвору;

s – товщина з'єднуваної деталі (висота циліндра).

Якщо з'єднані деталі мають різну товщину, то в розрахункову формулу підставляють меншу.

У машинобудуванні допустимі напруги на зминання для болтових, штифтових і шпонкових з'єднань з маловуглецевої сталі беруть у межах $[\sigma_{зм}] = 100 \dots 120$ МПа, для заклепочних з'єднань $[\sigma_{зм}] = 240 \dots 320$ МПа, для деревини (сосна, дуб) – $[\sigma_{зм}] = 2,4 \dots 11$ МПа залежно від сорту деревини і напрямку стискальної сили відносно напрямку волокон.

Умови міцності на зріз і зминання використовують для перевірки міцності з'єднання. Залежно від ставлення завдання вони можуть бути перетворені для визначення допустимого навантаження або необхідної площі перерізу (проектний розрахунок).

Запитання для самоконтролю

1. Яку деформацію називають зсувом?
2. Сформулюйте закон Гука для зсуву.

Тема 4. Геометричні характеристики плоских перерізів

План

1. Осьові, відцентровий та полярний моменти інерції перерізу
2. Зв'язок між осьовими та полярним моментами інерції перерізу
3. Моменти інерції простих перерізів: прямокутника, круга, кільця

1. Осьові, відцентровий та полярний моменти інерції перерізу

У деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Досі вивчалися деформації, у яких напруги залежали тільки від площі поперечного перерізу. Але для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати й деякі інші геометричні характеристики плоских фігур.

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис. 1).

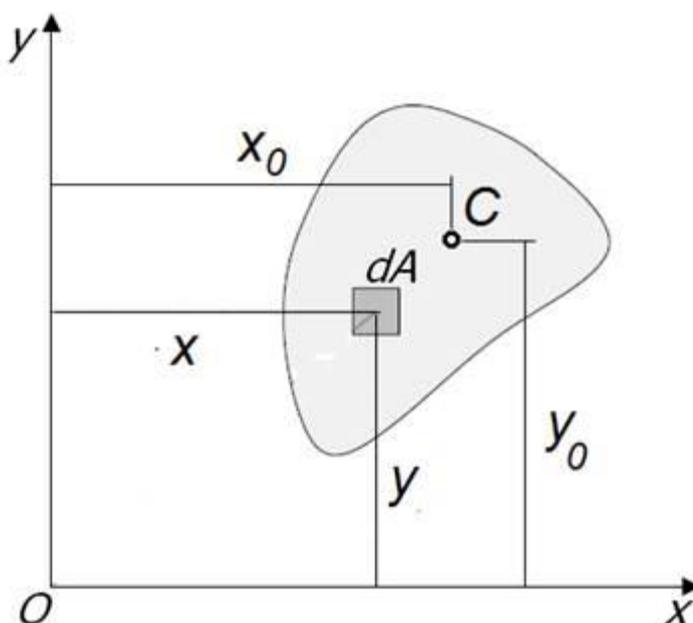


Рис. 1

Статичний момент площі позначимо S з індексом відповідної осі:

$$S_x = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A x \cdot dA$$

У випадку коли відомі координати центра ваги площі фігури статичний момент визначається із виразу:

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця статичного моменту площі м^3 .

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через **центр ваги** площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, **дорівнює нулю**.

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса (рис. 2).

Полярний момент інерції позначатимемо J_P :

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

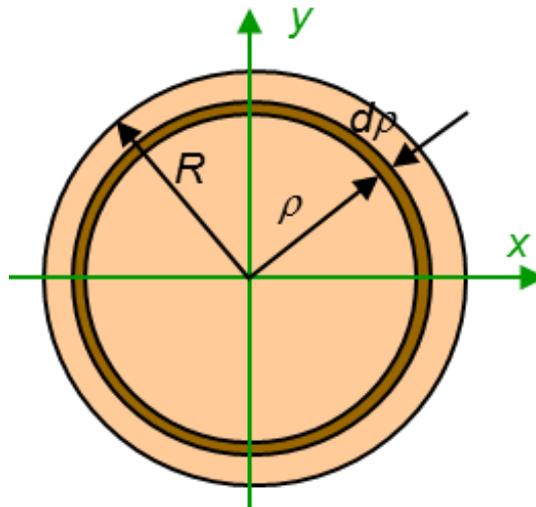


Рис. 2

Полярний момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю.

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі (рис. 1).

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dA, \quad J_y = \int_F x^2 \cdot dA$$

Очевидно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях: м⁴.

2. Зв'язок між осьовими та полярним моментами інерції перерізу

Осьовий момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю. Додамо моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x і y (рис. 1):

$$J_x + J_y = \int_F y^2 \cdot dA + \int_F x^2 \cdot dA = \int_F (x^2 + y^2) dA = \int_F \rho^2 \cdot dA = J_p$$

$$J_x + J_y = J_p$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

Через те, що інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, то момент інерції складної фігури можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур, на які розбивають складну фігуру. Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину.

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називають *центральною*. Момент інерції відносно центральної осі називають *центральним моментом інерції*.

Теорема. *Момент інерції відносно якої-небудь осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, паралельної цій, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.*

$$J_{xI} = J_x + a^2 \cdot A$$

Уявимо плоску фігуру, моменти інерції якої відносно осей координат J_x і J_y , а полярний момент інерції відносно початку координат J_p . Як вже було встановлено, $J_x + J_y = J_p$.

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції залишиться незмінним, а осьові моменти інерції змінюватимуться, до того ж

$$J_x + J_y = const.$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них **зменшується**, а друга **збільшується**. Отже, за якогось положення осей один із осьових моментів досягає **максимального**, а другий – **мінімального** значень. Осі, відносно яких моменти інерції максимальне і мінімальне значення, називають *головними осями інерції*. Момент інерції відносно головної осі називають *головним моментом інерції*.

Якщо головна вісь проходить через центр ваги фігури, то вона називається *головною центральною віссю*, а момент інерції відносно цієї осі – *головним центральним моментом інерції*. Якщо фігура має вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

3. Моменти інерції простих перерізів: прямокутника, круга, кільця

1) Проведемо осі, які збігаються з осями симетрії **прямокутника** $b \times h$ (рис. 3). Визначимо момент інерції відносно осі x .

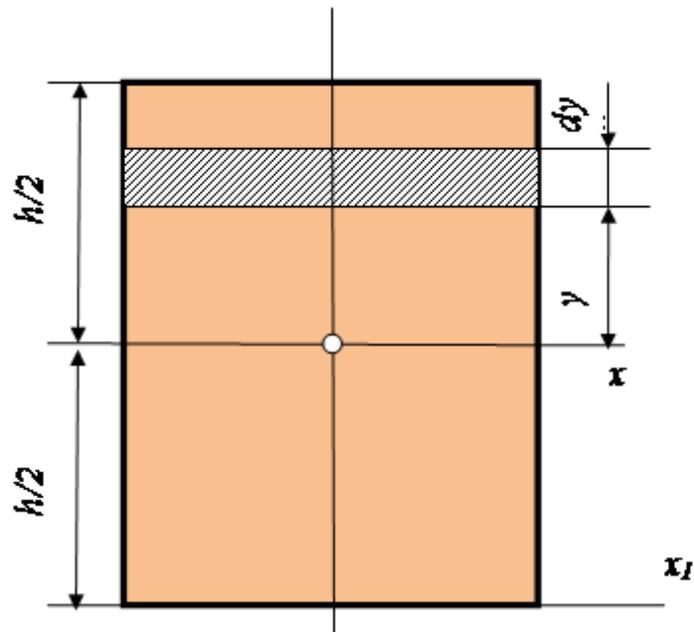


Рис. 3

Нескінченно малу площадку dA виділимо у вигляді смужки, що має ширину b і висоту dy , тоді $dA = bdy$:

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Отже, осьові моменти інерції дорівнюватимуть:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}.$$

Для квадрата із стороною a $J_x = J_y = \frac{a^3}{12}$.

2) Обчислимо момент інерції **трикутника** відносно осі x_1 , яка проходить через вершину і паралельна основі (рис. 4).

Для цього на відстані y від осі x_1 виділимо елементарну смужку шириною b_x і висотою dy , паралельну основі.

З подібності трикутників дістанемо:

$$b_x = \frac{b}{h} y.$$

Площа елементарної смужки дорівнює:

$$dF = \frac{b}{h} y dy.$$

Тоді момент інерції буде:

$$J_{x1} = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} y dy = \frac{bh^3}{4}.$$

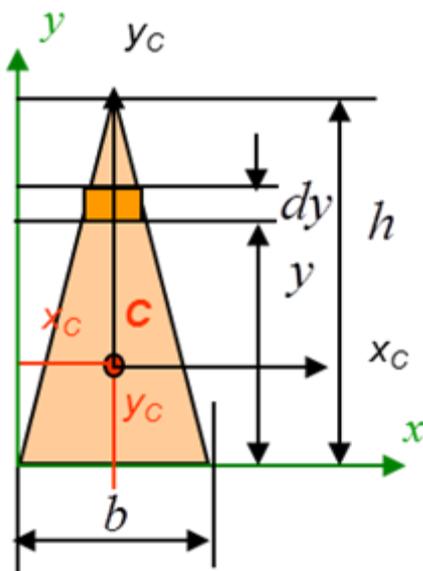


Рис. 4

Момент інерції відносно центральної осі, паралельної основі, дорівнює:

$$J_x = J_{x1} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \cdot A = \frac{bh^2}{4} - \frac{4}{9}h^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}.$$

3) **Круг** діаметром d (рис. 5).

Нескінченно малу площадку dA виділимо у вигляді кільця шириною $d\rho$, що знаходиться на змінній відстані ρ від полюса; тоді $dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$.

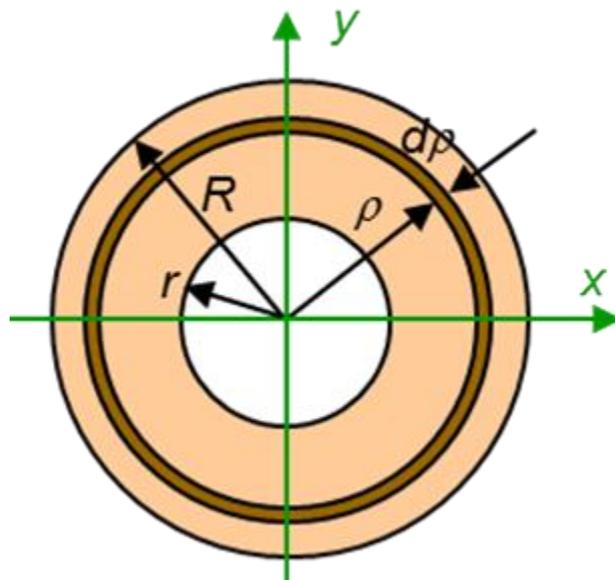


Рис. 5

Обчислимо полярний момент інерції:

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4$$

Внаслідок симетрії для круга осьові моменти інерції рівні $J_x = J_y$.

Оскільки $J_x + J_y = J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, $J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,05d^4$

4) **Кільце**, що має розміри $D \times d$.

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$$

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,1 \cdot (D^4 - d^4)$$

Полярний момент інерції **кільцевого перерізу** можна обчислити як різницю полярних моментів інерції великого і малого кругів.

Осьовий момент інерції:

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4)$$

Моменти інерції складних фігур визначають у такій послідовності:

- 1) складний переріз ділять на окремі прості фігури (прямокутники, трикутники, кола та ін.);
- 2) знаходять центр ваги складного перерізу;
- 3) обчислюють моменти інерції окремих простих фігур відносно власних центральних осей і потім відносно центральних осей всього перерізу;
- 4) підсумовують обчислені моменти інерції окремих простих фігур.

Моменти інерції прокатних профілів беруть із сортаменту. Користування сортаментом значно полегшує підрахунок моменту інерції складних перерізів.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають статичним моментом площі?
2. За якими формулами визначають статичні моменти площі?
3. Що називають полярним моментом інерції?
4. За якою формулою визначають полярний моменти інерції?
5. Що називають осьовим моментом інерції?
6. За якими формулами визначають осьові моменти інерції?

7. Чому дорівнює сума осьових моментів інерції?
8. Сформулюйте теорему про момент інерції відносно паралельної осі.
9. Які осі називають головними осями інерції?
10. Яку вісь називають головною центральною віссю інерції?
11. За якими формулами визначають осьові моменти інерції прямокутника?
12. За якими формулами визначають осьові моменти інерції круга і кільця?
13. За якими формулами визначають полярні моменти інерції круга і кільця?
14. Укажіть послідовність визначення моменту інерції складних фігур.

Тема 5. Кручення

План

1. Крутний момент. Побудова епюр крутних моментів
2. Кручення прямого бруса круглого поперечного перерізу. Напруження в поперечному перерізі бруса
3. Кут закручування. Полярні моменти опору для круга і кільця
4. Розрахунки на міцність і жорсткість під час кручення
5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин розтягу і стиску з малим кроком витка

1. Крутний момент. Побудова епюр крутних моментів

Крученням називають такий вид деформації, за якого в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент. Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Моменти цих пар називають **обертальними** (якщо брус обертається) і **скручувальними** (якщо брус не обертається). Згідно зі стандартом, обертальний момент позначають T .

Оскільки на кручення працюють вали, що звичайно мають круглий, або кільцевий переріз, то розглянемо кручення круглого циліндра рис. 1.

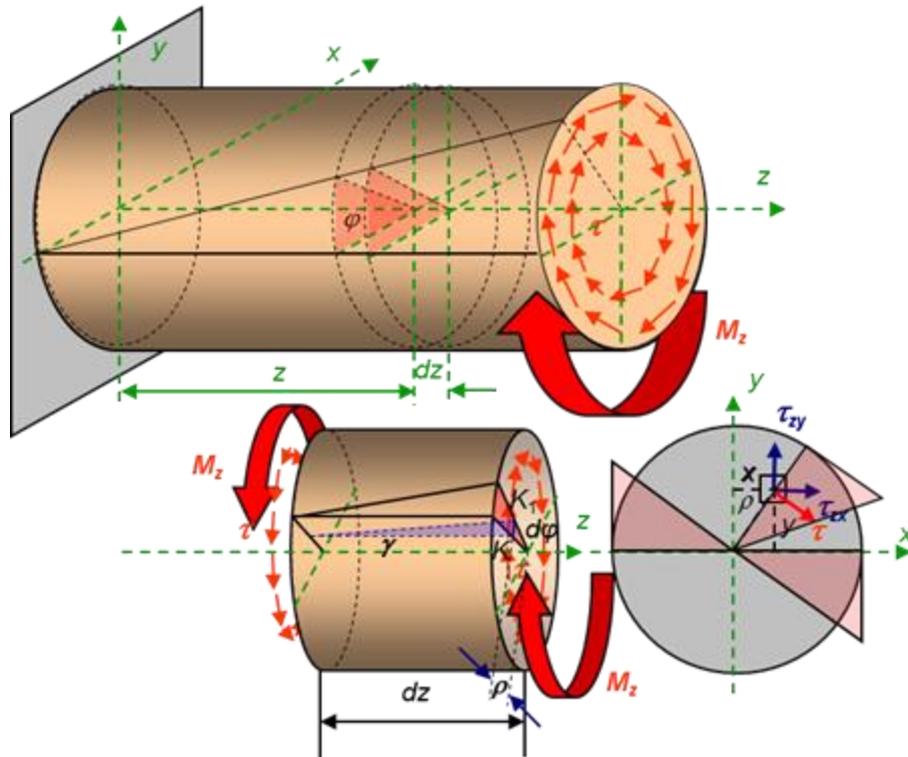


Рис. 1

Під час випробування гумового прямого кругового циліндричного бруса видно, що:

- 1) вісь циліндра, яку називають віссю кручення, залишиться прямолінійною;
- 2) діаметри кіл, під час деформації залишаться такими самими і відстань між колами не зміниться;
- 3) усі твірні циліндра повертаються на той самий кут;
- 4) кожний поперечний переріз повертається відносно один одного на деякий кут, який називають кутом закручування.

З цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються прямими під час деформації.

Кут φ повороту кінцевого перерізу називають *повним кутом закручування*.

Відносним кутом закручування називають відношення кута закручування до відстані цього перерізу від закріплення

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{l}.$$

Під час кручення виникає деформація зсуву, але не за рахунок поступального, а як результат обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Отже, під час кручення у поперечних перерізах виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент. **Крутний момент** є результуючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

Для наочного зображення розподілу крутних моментів уздовж осі бруса будують **епюри крутних моментів**. Крутний момент у перерізах бруса визначають за допомогою методу перерізів.

Крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.

Епюри крутних моментів дають змогу визначити небезпечні перерізи.

2. Кручення прямого бруса круглого поперечного перерізу. Напруження в поперечному перерізі бруса

Знаючи, що під час кручення відбувається **деформація зсуву**, природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки **дотичні напруги**.

На рис. 1 видно, що **абсолютний зсув** характеризується **кутом зсуву γ** .

Через незначні деформації $\gamma = \tan \gamma$, $aa_1 = l \cdot \gamma_{\max}$, $bb_1 = l \cdot \gamma$.

Оскільки радіуси поперечних перерізів під час деформації залишаються прямими, виразимо довжини дуг $aa_1 = \varphi \cdot r$, $bb_1 = \varphi \cdot \rho$.

де: φ – повний кут закручування, рад;

r – радіус циліндра;

ρ – відстань волокна b від осі кручення.

$$\frac{bb_1}{aa_1} = \frac{l \cdot \gamma}{l \cdot \gamma_{\max}} = \frac{\varphi \cdot \rho}{\varphi \cdot r}$$

Розділимо $\frac{bb_1}{aa_1} = \frac{l \cdot \gamma}{l \cdot \gamma_{\max}} = \frac{\varphi \cdot \rho}{\varphi \cdot r}$; звідси $\gamma = \gamma_{\max} \cdot \frac{\rho}{r}$ кут зсуву прямо пропорційний відстані ρ до осі обертання.

Застосовуємо формулу **закону Гука** для зсуву $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{\max}$, за $\rho = r$;

$\tau_{\max} = G \cdot \gamma_{\max}$; тоді $\tau = G \cdot \gamma_{\max} \cdot \frac{\rho}{r} = \tau_{\max} \cdot \frac{\rho}{r}$; дотичні напруги в поперечному перерізі змінюються за довжиною радіуса за **лінійним законом**.

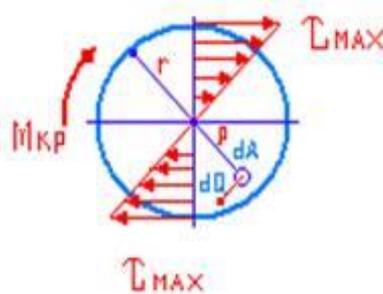


Рис. 2

Отже, дотичні напруги у кожній точці поперечного перерізу вала прямо пропорційні відстані ρ цієї точки від центра перерізу.

Графічно закон зміни дотичних напруг зображують прямою лінією. Епюру дотичних напруг показано на рис. 2. Як бачимо, найбільше значення дотичні напруги мають біля поверхні вала, в центрі вони дорівнюватимуть нулю.

Величину дотичної напруги після того, як знайдено закон розподілу, можна визначити з рівняння, яке виражає умову рівноваги відсіченої частини вала.

Сумарний момент усіх внутрішніх дотичних сил відносно осі вала дорівнює:

$$M_B = M_K = \int_A \tau \cdot dA \cdot \rho = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A dA \cdot \rho^2 ;$$

де: dA – площа елементарної площадки на відстані ρ від осі кручення;

$$I_P = \int_A dA \cdot \rho^2 \quad \text{– полярний момент інерції перерізу.}$$

$$M_K = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot I_P = \frac{\tau \cdot r}{r \cdot \rho} \cdot I_P ;$$

$$\tau = \frac{M_K}{I_P} \cdot \rho \quad \text{– формула для визначення дотичних напруг під час кручення бруса круглого поперечного перерізу.}$$

Коли $\rho = r$, то напруги матимуть максимальні значення.

$$W_P = \frac{I_P}{r} \quad \text{– полярний момент опору крученню (відношення полярного моменту інерції до радіуса перерізу).}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P} \quad \text{– формула для визначення найбільших дотичних напруг.}$$

3. Кут закручування. Полярні моменти опору для круга і кільця

$$\varphi_o = \frac{M_K}{G \cdot I_P} \quad \text{– формула для визначення відносного кута закручування, рад.}$$

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_P} \quad \text{– формула для визначення повного кута закручування, рад/м.}$$

$G \cdot I_P$ – жорсткість перерізу під час кручення.

У формулах кут закручування виражено в радіанах. Переведення у градуси виконується за такою формулою:

$$\varphi_o = \varphi \cdot \frac{180}{\pi} .$$

Повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено пропорційний жорсткості перерізу під час кручення.

Оскільки для виведення формули застосовано закон Гука, то вона дійсна в межах, коли навантаження і деформація прямо пропорційні.

Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок.

Полярні моменти інерції і моменти опору перерізу вала.

Для суцільного круглого вала:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Для порожнистого вала:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - \alpha^4); \quad \text{де } \alpha = \frac{d}{d_0}.$$

4. Розрахунки на міцність і жорсткість під час кручення

Умова міцності бруса для кручення полягає у тому, що найбільша дотична напруга, яка виникає у ньому, не має перевищувати допустиму. Розрахункова формула на міцність для кручення має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau_K]$$

Допустиму напругу кручення вибирають залежно від допустимої напруги розтягу, а саме:

- для сталей $[\tau_K] = (0.55 \div 0.60) \cdot [\sigma_p];$
- для чавунів $[\tau_K] = (1 \div 1.2) \cdot [\sigma_p].$

Крім міцності до валів ставлять вимогу жорсткості, яка полягає у тому, що кут закручування l м довжини вала не має перевищувати певної величини, щоб не сталося, наприклад, пружинення валів або втрат точності ходових гвинтів токарно-гвинторізних верстатів. Не можна допускати великих кутів закручування в зубчастих передачах за великих кутів закручування вали зубчастих коліс перекосяться. Це призводить до кришення поверхні зубів і поломки передачі.

Допустимий кут закручування l м довжини вала задають у градусах і позначають $[\varphi_0^\circ]$; розрахункова формула на жорсткість для кручення має вигляд:

$$\varphi_0^0 = \frac{180 \cdot M_K}{\pi \cdot G \cdot I_P} \leq [\varphi_0^0]$$

Величини допустимих кутів закручування залежать від призначення вала, їх зазвичай беруть у таких межах: $[\varphi_0^0] = 0,25 \div 1$ (град/м).

За допомогою введених формул виконують три види розрахунків конструкцій на міцність і жорсткість для кручення – проектний розрахунок, перевірний розрахунок і визначення допустимого навантаження.

5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин розтягу і стиску з малим кроком витка

Розглянемо приклад інженерного розрахунку **гвинтових циліндричних пружин**, які поширені у техніці (ресорах вагонів, клапанах, інших механізмах сучасних транспортних засобів).

Розглянемо пружину (рис. 2а), виготовлену зі сталюого круглого прутка; $f = h_0 - h_1$ – осідання пружини під дією сили F . Розрахункові параметри:

d – діаметр прутка; D – середній діаметр витків; n – кількість витків.

Згідно з методом перерізів, розглядаючи рівновагу верхньої частини пружини (рис. 2б), визначаємо внутрішні силові фактори: поперечну силу $Q = F$ та крутний момент $T = F \cdot D/2$. Звідки випливає, що у поперечному перерізі витка діють тільки **дотичні напруження зсуву та кручення**.

Насправді, при цьому ми нехтували малими за величиною подовжньою силою та згинальним моментом. Помилка за такого розрахунку буде більшою, що більше кут піднімання витка α .

Максимальні сумарні напруження діють у крайній точці перерізу витка на внутрішньому радіусі пружини:

$$\tau_{\max} = \tau_{zc} + \tau_{xp} = \frac{F}{A} + \frac{T}{W_p} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{F \cdot D/2}{\pi d^3/16} = \frac{4F}{\pi d^2} (1 + 2c),$$

де $c = D/d$ – *індекс пружини*.

Аналіз свідчить, що напруження зсуву τ_{zc} становлять лише 5–10 % від напружень кручення τ_{xp} і можуть за грубих розрахунків не враховуватися.

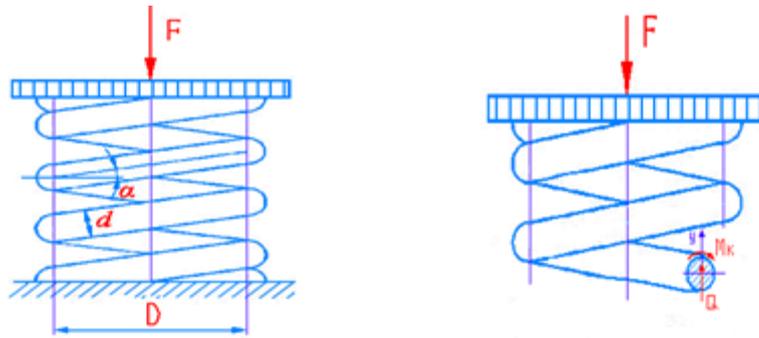


Рис. 3

Більш точний результат дає формула, яка враховує кривизну витків за допомогою спеціального поправкового коефіцієнта $k = (4c + 2) / (4c - 3)$; тоді формулу для розрахунку пружини на міцність можна записати у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot F \cdot c \cdot k}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau]$$

Під час визначення осідання f пружини будемо враховувати тільки кручення витого прутка, бо інші види деформування вносять дуже малий вклад. Скористаємось *енергетичним підходом*, згідно з яким робота зовнішньої сили F на осіданні f переходить у потенційну енергію U деформованої пружини, яка дорівнює роботі крутного моменту T_x на куті φ закручення прутка (рис. 3).

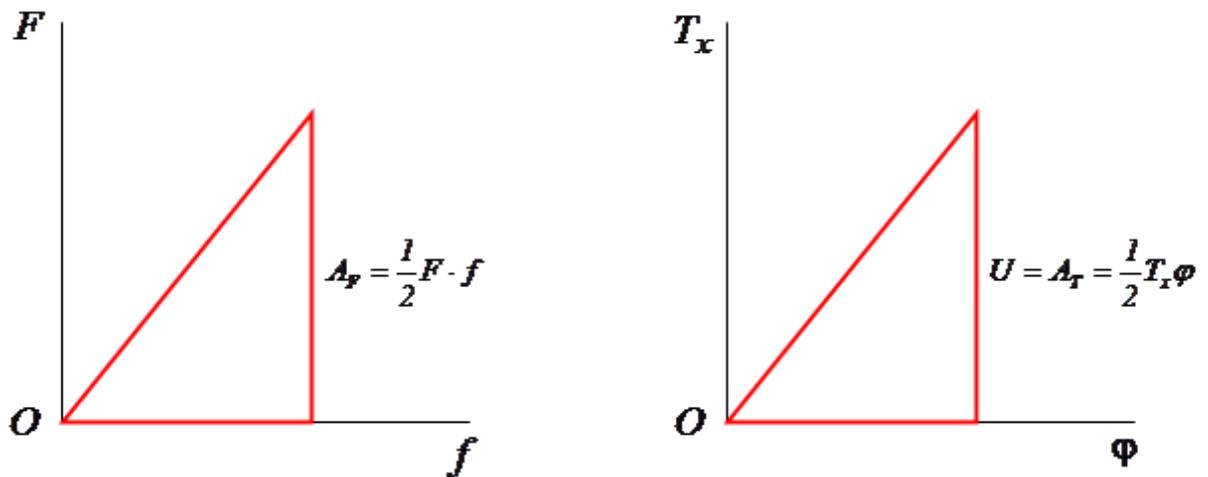


Рис. 4

Запишемо потенційну енергію U з урахуванням формули для φ , величини крутного моменту $T = F \cdot D / 2$, довжини прутка $l = \pi D \cdot n$ та формули для I_p :

$$A_F = U$$

$$U = \frac{1}{2} T_x \frac{T_x \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{1}{2} \frac{(FD/2)^2 \pi D \cdot n}{G \cdot \pi d^4 / 32}$$

Після підставлення виразів для A_F і U та деяких скорочень отримаємо остаточну розрахункову формулу для осідання пружини:

$$f = \frac{F^2 D^2 \pi D n 32}{4 G \pi d^4 F} = \frac{8 F D^3 n}{G d^4} = \frac{8 F c^3 n}{G d}$$

Можна підібрати такі параметри пружини, щоб отримати для заданого навантаження бажане осідання пружини.

Запитання для самоконтролю

1. Який вид деформації називають крученням?
2. Які моменти називають обертальними, а які скручувальними?
3. Що називають повним кутом закручування?
4. Що називають відносним кутом закручування?
5. Чому дорівнює крутний момент у будь-якому поперечному перерізі під час кручення?
6. Для чого будують епюри крутних моментів?
7. Чим характеризують абсолютний зсув під час кручення?
8. За яким законом змінюють дотичні напруги у поперечних перерізах?
9. За якою формулою визначають найбільші дотичні напруги?
10. За якою формулою визначають повний кут закручування?
11. За якою формулою визначають полярні моменти опору для суцільного та порожнистого валів?
12. Сформулюйте умову міцності під час кручення.
13. Сформулюйте умову жорсткості під час кручення.
14. Які три види розрахунків можна виконувати на міцність і жорсткість?
15. За якою формулою визначають осідання пружини?

Тема 6. Згин

План

1. Основні поняття та визначення. Класифікація видів згину. Внутрішні силові фактори за прямого згину
2. Диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження
3. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів
4. Нормальні напруження в поперечних перерізах за згину. Осьові моменти опору

5. Розрахунки на міцність за згину. Раціональні форми поперечних перерізів балок за згину
6. Поняття про дотичні напруження за прямого поперечного згину
7. Лінійні та кутові переміщення за прямого згину. Розрахунки на жорсткість за згину

1. Основні поняття та визначення. Класифікація видів згину. Внутрішні силові фактори за прямого згину

Згин – це один з простих видів навантаження (деформації) бруса, за якого у його поперечному перерізі діє *внутрішній згинальний момент* ($M_{zz} \neq 0$), внаслідок чого вісь бруса викривляється.

Брус, що працює на згин, називають **балкою**.

Згин може виникати під дією зовнішніх поперечних сил (зосереджених або розподілених уздовж бруса) та моментів пар сил.

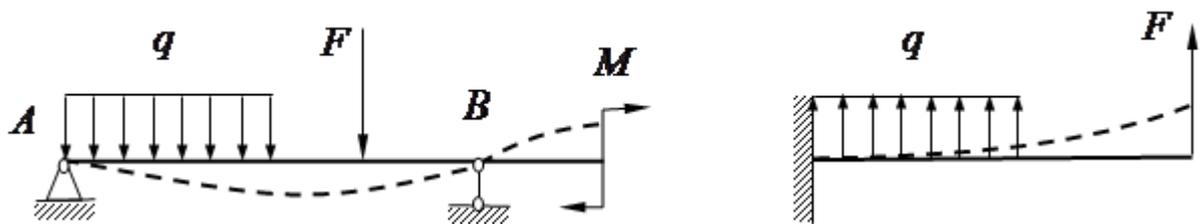


Рис. 1

Під час деформації згину у поперечних перерізах балки виникають такі внутрішні силові фактори, як поперечна сила Q_x і згинальний момент M_{zz} .

Розрізняють такі види згину:

- *чистий згин* ($M_{zz} = const \neq 0$, $Q_x = 0$);
- *поперечний згин* ($M_{zz} \neq 0$, $Q_x \neq 0$).

Якщо площина дії згинального моменту (**силова площина**) проходить через одну з *головних центральних осей* поперечного перерізу бруса, згин називають **плоским прямим**. При цьому викривлена вісь бруса буде плоскою кривою, яка розташована в силевій площині.

Якщо навантаження не лежать в одній силевій площині, то і викривлена вісь бруса буде просторовою кривою. У такому разі маємо **складний просторовий згин**. Таку схему навантаження можна розглядати як суперпозицію двох плоских прямих згинів, для чого усі навантаження треба розкласти на складові на головних осях інерції перерізу.

Поперечна сила в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Правило знаків. Зовнішні сили, які намагаються повернути відрізану частину балки, відносно перерізу, за ходом часової стрілки визивають додатну поперечну силу, і навпаки проти ходу часової стрілки від'ємну (рис. 2).

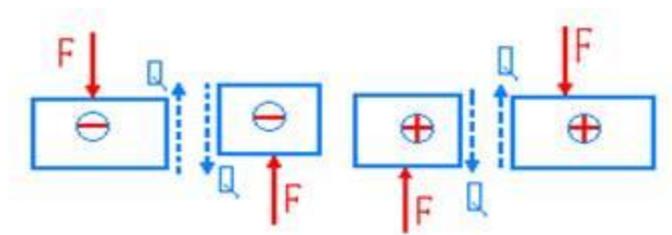


Рис. 2

Згинальний момент у перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Правило знаків. Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю донизу, то згинальний момент у перерізі вважають додатним, і навпаки (рис. 3).

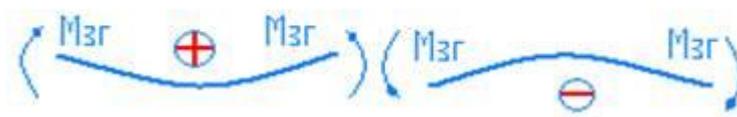


Рис. 3

2. Диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження

Між згинальним моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить **теорема Журавського**, названа так за ім'ям визначного російського інженера-мостобудівника Д.І. Журавського (1821–1891). Цю теорему формулюють так: **поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту за абсцисою перерізу балки:**

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}$$

Якщо рівняння згинальних моментів (для ділянок з рівномірно розподіленим навантаженням) продиференціювати вдруге, то матимемо

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{dQ}{dx} = q$$

Друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

3. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів

Під час побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів рекомендується дотримуватися такої **послідовності**:

- 1) Визначити реакції опор (для консолі їх можна не знаходити).
- 2) Розбити брус на ділянки, границями яких є перетини, в яких прикладені зосереджені сили і пари або розпочинається чи закінчується розподільне навантаження. Такі перетини називають характерними.
- 3) Користуючись методом перетинів, будуємо епюру поперечних сил. Якщо поперечна сила, змінюючись безперервно, проходить через нульове значення, то необхідно визначити абсцису перерізу, де Q стає нульовим.
- 4) Визначити в характерних перетинах значення згинальних моментів і за знайденими ординатами побудувати епюру M_x .

Взаємозв'язок між видами епюр і навантаженням

Для епюри поперечних сил

- 1) На ділянках, де прикладено рівномірно розподільне навантаження, епюра – похила пряма, нахил прямої до осі балки залежить від інтенсивності навантаження.
- 2) На ділянках, вільних від рівномірно розподільного навантаження, епюра – пряма паралельна осі балки.
- 3) У перетинах, де прикладено зосереджену силу, значення поперечної сили змінюється стрибкоподібно, до того ж стрибок дорівнює модулю цієї сили.
- 4) У перетинах, де прикладено пару сил, значення поперечної сили не змінюється.
- 5) У кінцевих перетинах балки поперечна сила чисельно дорівнює зосередженим силам, які прикладені у цьому перерізі. Якщо в кінцевому перерізі не прикладені зосереджені сили, поперечна сила в них рівна нулю.

Для епюри згинальних моментів

- 1) На ділянках, де прикладено рівномірно розподільне навантаження, епюра моментів є параболою. Опуклість параболи спрямовано в бік протилежний дії навантаження (на зустріч навантаженню).
- 2) На ділянках, вільних від рівномірно розподільного навантаження, епюра моментів похила пряма. Під зосередженими силами на епюрі утворюються згини, тобто для декількох ділянок епюра – ломана лінія.

3) У перерізі, де прикладено пару сил, значення згинального моменту змінюється стрибкоподібно, до того ж стрибок дорівнює моменту пари.

4) На кінці балки згинальний момент дорівнює нулю, якщо там не прикладено пару сил. Якщо в кінцевому перерізі прикладено зовнішню пару сил, то згинальний момент дорівнює моменту пари.

5) На ділянках, де $Q = 0$, балка відчуває чистий згин і епюра згинальних моментів – пряма паралельна осі балки.

6) Згинальний момент має екстремальне значення (*max* або *min*) в перетинах, де змінено знак поперечної сили.

4. Нормальні напруження в поперечних перерізах за згину. Осьові моменти опору

У поперечному перерізі балки за чистого згину виникають тільки **нормальні напруги** розтягу і стиску.

Для доказу розрахункових формул вводять такі **припущення**, які зроблені на основі досліджень:

1) плоский поперечний переріз балки за чистого згину залишається плоским до і після деформації (гіпотеза плоских перетинів);

2) поздовжні волокна не тиснуть одне на одне, тобто під дією нормальних напружень вони перебувають у лінійному напруженому стані.

Навантажуючи гумову модель двома протилежними парами сил, можна зробити такий висновок (рис. 4.): **за чистого згину поперечні перетини повертаються, поздовжні волокна на опуклому боці видовжуються, а на вгнутому – стискаються.**

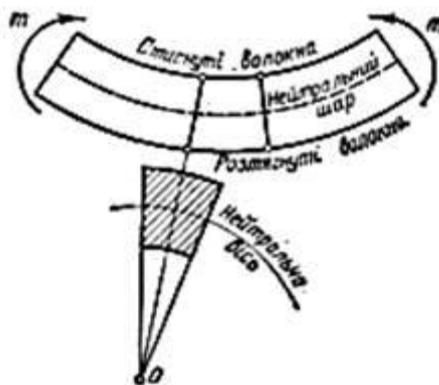


Рис. 4

На межі між ними лежить **нейтральний шар** волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини.

Приймаючи **гіпотезу про ненатискання волокон**, можна стверджувати, що за **чистого згину** в поперечних перетинах бруса виникають тільки **нормальні напруги розтягу і стиску**, які нерівномірно розподілені за висотою перерізу і залишаються сталими за шириною.

Викривлення волокон і осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напружень на поперечному перерізі. Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу називають **нейтральною віссю**. На нейтральній осі напруги дорівнюють нулю.

Як було встановлено раніше, в поперечних перетинах балки у випадку чистого згину виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску. Щоб визначити розподіл цих напруг на поперечному перерізі, треба розглянути деформації волокон балки.

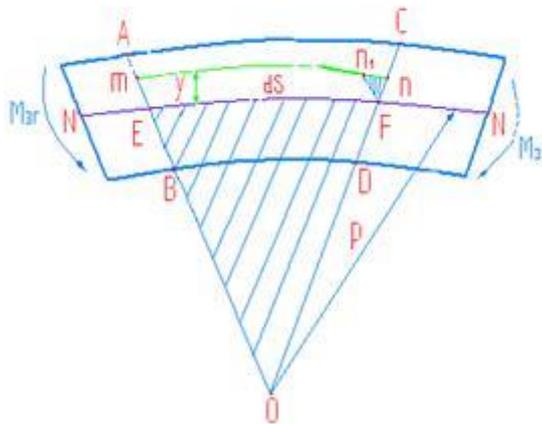


Рис. 5

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину. Двома поперечними перетинами AB і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини ds (рис. 5). Радіус кривизни **нейтрального шару** позначимо ρ . Розглянемо шар волокон, який знаходиться на відстані y від нейтрального шару NN . Це волокно як результат деформації згину видовжилось на величину mn_1 . Зважаючи на малість відстані ds , заштриховані трикутники вважаємо прямолінійними; ці трикутники подібні.

$$(n_1F \parallel mE): \quad \triangle OEF \approx \triangle Fm_1E$$

$$\frac{mn_1}{ds} = \frac{y}{\rho}$$

З подібності трикутників маємо

рівності є відносним видовженням, тобто $\frac{mn_1}{ds} = \varepsilon$, то $\frac{y}{\rho} = \varepsilon$.

Застосувавши закон Гука для розтягу і стиску $\sigma = E \cdot \varepsilon$, матимемо:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$$

З цієї формули видно, що нормальні напруги деформації згину розподілені за висотою перерізу **нерівномірно**: максимальні напруги виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі. За шириною перерізу нормальні напруги не змінюються. **Закон розподілу нормальних напруг** зображено на рис. 6.

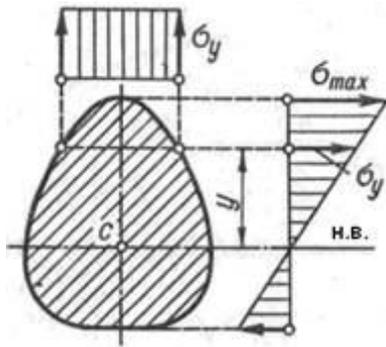


Рис. 6

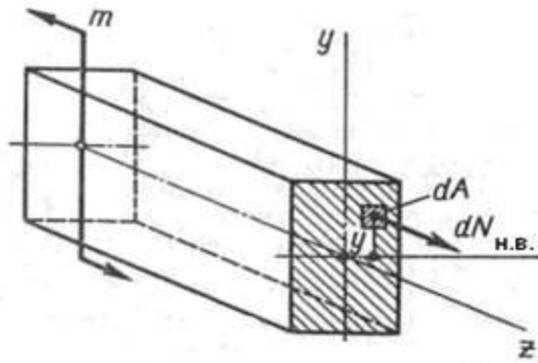


Рис. 7

Ця формула для обчислення нормальних напруг незручна, бо до неї входить радіус кривизни нейтрального шару. Щоб знайти формулу, яка зв'яже нормальні напруги і згинальний момент, застосуємо **метод перетинів** і розглянемо рівновагу частини балки, зображеної на рис. 7.

У площині поперечного перетину виділимо нескінченно малу площадку dA , у межах якої вважатимемо нормальні напруги σ сталими; тоді нормальна сила dN , що діє на площадку dA , дорівнюватиме $dN = \sigma \cdot dA$. Складемо два рівняння рівноваги:

$$1) \sum F_z = 0; \quad \int_A dN = 0; \quad \int_A \sigma \cdot dA = \int_A \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0$$

(ρ для цього перерізу величина стала, тому її винесено за знак інтеграла).

$$\text{Оскільки } E \text{ і } \rho \text{ не дорівнюють нулю, то } \int_A y \cdot dA = 0$$

Цей інтеграл є **статичним моментом площі** перерізу відносно осі x , тобто нейтральної осі. Те, що статичний момент дорівнює нулю, означає, що під час згину нейтральна вісь проходить через **центр ваги** площі поперечного перетину.

$$2) \sum M_x = 0; \quad -m + \int_A y \cdot dN = 0;$$

оскільки за чистого згину згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту $M_{z_2} = m$, то:

$$M_{z_2} = \int_A y \cdot dN = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \int_A y \cdot \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA$$

$$\text{звідки } M_{z_2} = \frac{E \cdot I}{\rho}$$

де: $I = \int_A y^2 \cdot dA$ – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі,
 EI – жорсткість перерізу за згину.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу:

$$M_{zz} = \text{const} \quad \text{і} \quad I = \text{const, то} \quad \rho = \frac{E \cdot I}{M_{zz}} = \text{const.}$$

Отже, зігнута вісь такої балки є **дугою кола**.

Значення радіуса кривизни підставимо у формулу для обчислення нормальних напруг, тоді:

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} = \frac{E \cdot y}{E \cdot I / M_{zz}} = \frac{M_{zz} \cdot y}{I}$$

Максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна **найбільш віддалені** від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{zz} \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M_{zz}}{I / y_{\max}} = \frac{M_{zz}}{W},$$

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

де y_{\max} – момент опору згину.

Момент опору згину є відношення осьового моменту інерції поперечного перетину відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна.

Значення моментів опору деформації згину найбільш поширених перерізів.

$$1) \text{ Прямокутник } b \times h: \quad W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6}$$

$$2) \text{ Круг діаметром } d: \quad W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3$$

5. Розрахунки на міцність за згину. Рациональні форми поперечних перерізів балок за згину

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальна нормальна напруга в небезпечному перерізі не має перевищувати допустиму.

Вважаючи, що гіпотеза про ненатискання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруги в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{zz \max}}{W} \leq [\sigma]$$

її читають так: нормальна напруга в небезпечному перерізі, не має перевищувати допустиму. **Допустиму нормальну напругу** для випадку згину беруть такою самою, як для розтягу і стиску.

Максимальний згинальний момент визначають з епюр згинальних моментів або розраховують.

Оскільки момент опору деформації згину W у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то що більше W , то менші розрахункові напруги.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад чавун), доцільно використовувати профілі, **несиметричні відносно нейтральної осі**, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у несиметричному профілю під час згину виникають неоднакові напруги розтягу і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки вигідно розміщувати таким чином, щоб менші напруги були у зоні розтягнутих, а більші – в зоні стиснених волокон.

Для розрахунків балок із **крихкого** матеріалу використовують дві умови міцності:

$$\begin{aligned} & \text{- для розтягнутої зони} & \sigma_{\text{роз.мах}} = \frac{|M|_{\text{мах}} \cdot y_{\text{роз}}}{I_x} \leq [\sigma_p]; \\ & \text{- для стисненої зони} & \sigma_{\text{ст.мах}} = \frac{|M|_{\text{мах}} \cdot y_{\text{ст.}}}{I_x} \leq [\sigma_{\text{ст}}]. \end{aligned}$$

Використання матеріалу буде найкращим, за умови що

$\sigma_{\text{роз.мах}} = [\sigma_p]$; $\sigma_{\text{ст.мах}} = [\sigma_{\text{ст}}]$, для цього має виконуватися умова $\frac{y_{\text{роз}}}{y_{\text{ст.}}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{\text{ст}}]}$ тобто відстань нейтральної осі від найбільш віддалених точок у розтягнутій і стисненій зонах переріза мають бути **пропорційні** відповідній допустимій нарузі.

6. Поняття про дотичні напруження за прямого поперечного згину

У поперечних перерізах балки під час деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й **дотичні напруги**, які спричиняють деформацію **зсуву**. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруги виникатимуть і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах можна проілюструвати на такому прикладі.

Якщо брус прямокутного перерізу висотою $2h$ навантажити силою, оскільки показано на рис. 8а. Якщо з такого самого матеріалу виготовити два бруси висотою h кожний, то за навантаження силою F і відсутності тертя між ними вони зігнуться кожен сам по собі рис. 8б, звідси видно, що за згину цілого бруса висотою $2h$ між частинами бруса, розділеними поздовжніми волокнами, виникає взаємодія, як результат якої і виникають дотичні напруги. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах підтверджується появою в дерев'яних балках за поперечного згину поздовжніх тріщин.

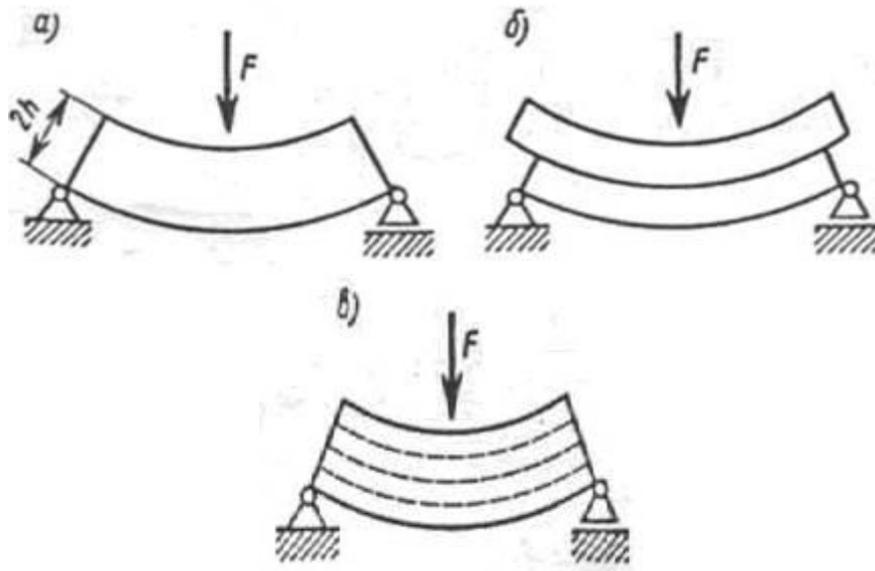


Рис. 8

Формулу для обчислення дотичних напруг поперечного згину балок прямокутного перерізу вивів у 1855 р. російський інженер-мостобудівник **Д.І. Журавський**. Така формула була потрібна в зв'язку з тим, що в минулому столітті для будівництва мостів широко використовували дерев'яні конструкції, а балки з деревини зазвичай мають прямокутний переріз і погано працюють на сколювання вздовж волокон:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b},$$

де: Q – поперечна сила в перерізі;

S – статичний момент відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглянутого шару волокон ;

I – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі;

b – ширина розглядуваного шару волокон.

Цю рівність називають **формулою Журавського**, за нею визначають дотичні напруги в балках симетричного перерізу.

Формулу Журавського читають так: *дотичні напруги в поперечному перерізі балки дорівнюють добутку поперечної сили Q на статичний момент S відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглядуваного шару волокон, поділеному на момент інерції I всього перерізу відносно нейтральної осі і на ширину b розглядуваного шару волокон.*

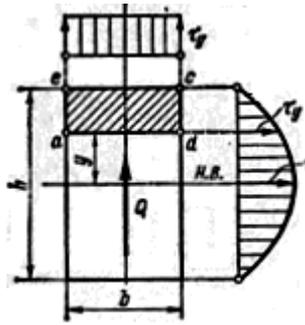


Рис. 9

Визначимо закон розподілу дотичних напруг для балки прямокутного перерізу рис. 9 для шару волокон ad .

$$S_{adce} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6 \cdot Q \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot h^3};$$

коли $y = \pm \frac{h}{2}$, то $\tau = 0$;

коли $y = 0$, то $\tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3\tau_c}{2}$.

Таким чином, у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруги дорівнюють нулю, а в волокнах нейтрального шару вони досягають максимального значення. Закони розподілу дотичних напруг за шириною і висотою прямокутного перерізу показано рис. 9.

Дотичні напруги в балках відповідають деформації зсуву, як результат плоскі поперечні перерізи за поперечного згину не залишаються плоскими, як за чистого згину, а викривляються.

Більшість балок розраховують тільки за нормальними напругами; три види балок треба перевірити за дотичними напругами, а саме:

- 1) дерев'яні балки, бо деревина погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки (наприклад, двотаврові), бо максимальні дотичні напруги обернено пропорційні ширині нейтрального шару;
- 3) короткі балки, бо за відносно невеликого згинального моменту й нормальних напругах у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруги.

7. Лінійні та кутові переміщення за прямого згину. Розрахунки на жорсткість за згину

У більшості випадків практичного розрахунку деталей, що працюють на згин, необхідно також робити **розрахунок на жорсткість**. Під **розрахунком на жорсткість** розуміється оцінювання пружної піддатливості балки під дією прикладених навантажень і підбір таких розмірів поперечного перерізу, за яких переміщення не будуть перевищувати встановлених нормами меж. Для виконання такого розрахунку необхідно навчитися обчислювати переміщення точок балки під дією будь-якого зовнішнього навантаження, що необхідно також для розрахунку статично невизначених балок.

Розглянемо деформацію балки за плоского згину. Вісь балки (рис. 10) під дією навантаження, розташованого в одній з головних площин інерції (у площині $хоу$), викривляється в тій самій площині, а поперечні перерізи повертаються й одночасно одержують поступальні переміщення.

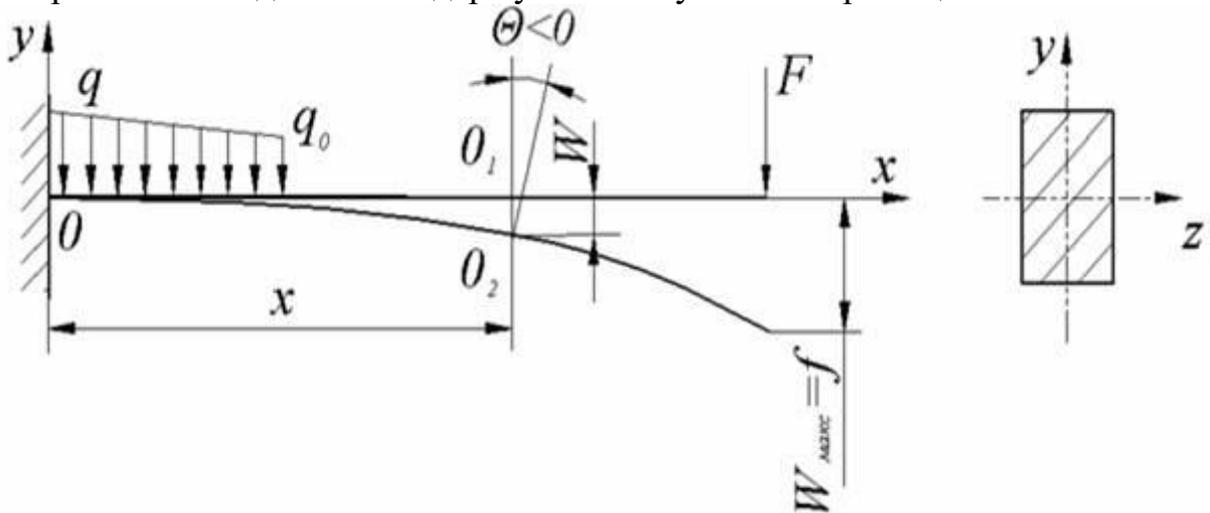


Рис. 10. Прогин за плоского згину

Скривлена вісь балки називається **вигнутою віссю**, або **пружною лінією**. На рис. 10 і 11 пружну лінію зображено тонкою кривою лінією.

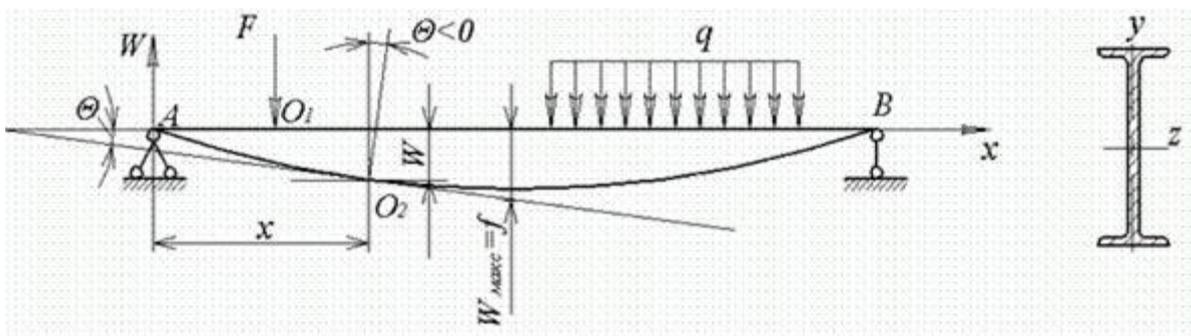


Рис. 11. Кут повороту за згину

Переміщення центра ваги перерізу за напрямком, перпендикулярним до осі балки, називають **прогином** балки в цьому перерізі й позначають літерою w . На рис. 10 і 11 центр ваги довільного перерізу, взятого на відстані x від початку координат, перемістився за вертикаллю із точки O_1 у точку O_2 на відстань O_1O_2 . Це переміщення і є прогином балки $w(x)$ у перерізі

з абсцисою x . Найбільший прогин називається **стрілою прогину** й позначається літерою f .

Кут θ , на який кожний переріз повертається стосовно свого первісного положення, називають **кутом повороту** перерізу. Кут повороту також може бути визначений як кут між дотичною до пружної лінії й віссю x (рис. 11).

Довжина вигнутої осі, що належить нейтральному шару, за скривлення бруса не змінюється, отже, при цьому відбувається зсув її точок також і в напрямку осі x (переміщення O_1O_3 на рис. 12). Однак у більшості випадків зсуви настільки малі, що ними можна знехтувати.

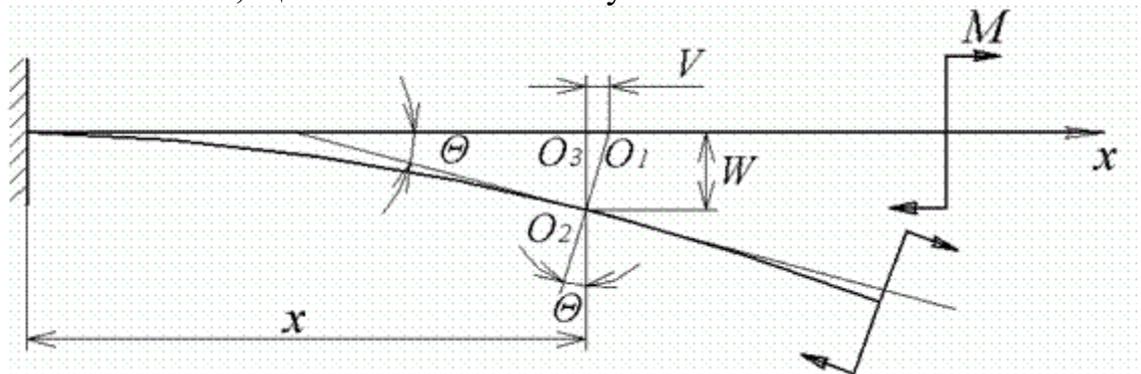


Рис. 12. Горизонтальне переміщення за згину

Умовимося осі координат завжди розміщати таким чином: початок координат поміщати на лівому кінці балки, вісь x спрямовувати вздовж осі балки вправо, а вісь w – вгору.

Прогин w будемо вважати **позитивним**, якщо переміщення відповідної точки відбувається **вгору**, тобто в напрямку осі w . **Кут повороту θ** будемо вважати **позитивним** за повороту перерізу **проти годинникової стрілки**.

У зв'язку з малістю деформацій балок можна вважати $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ тому, що тангенс кута повороту є похідна від ординати прогину:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dw}{dx}.$$

То з достатнім ступенем точності можна вважати кут повороту θ в цьому перерізі рівним похідній прогину $w(x)$ по абсцисі перерізу:

$$\theta \approx \frac{dw}{dx}.$$

Таким чином, для визначення деформації балки в її довільному перерізі необхідно, насамперед, одержати рівняння пружної лінії:

$$w = F(x).$$

Виходячи з фізичної природи вигнутої осі бруса, можемо затверджувати, що пружна лінія має бути безперервною й гладкою (не має зломів) кривою, отже, впродовж всієї осі бруса мають бути неперервні функція w і її перша похідна. Прогини й кути повороту і є переміщеннями перерізів балок за вигину. Деформація тої або іншої ділянки балки визначається скривленням його вигнутої осі, тобто кривизною. Тому що вплив поперечної сили на кривизну малий, то в загальному випадку поперечного вигину рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

З курсу вищої математики відомо наступне рівняння кривизни плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Тепер для одержання диференціального рівняння вигнутої осі залишається прирівняти праві частини цих виразів, з'ясувавши попередньо питання про знак.

Якщо згинальний момент позитивний, то пружна лінія своєю ввігнутою стороною звернена нагору (рис. 13а), отже, за прийнятого напрямку координатних осей кривизна $k=1/\rho$ – вважається позитивною. За негативного згинального моменту кривизна також буде негативною (рис. 13б). Якби вісь w була спрямована донизу, то за позитивного згинального моменту кривизна була б негативною (рис. 13в), а за негативного моменту – позитивною (рис. 13г).

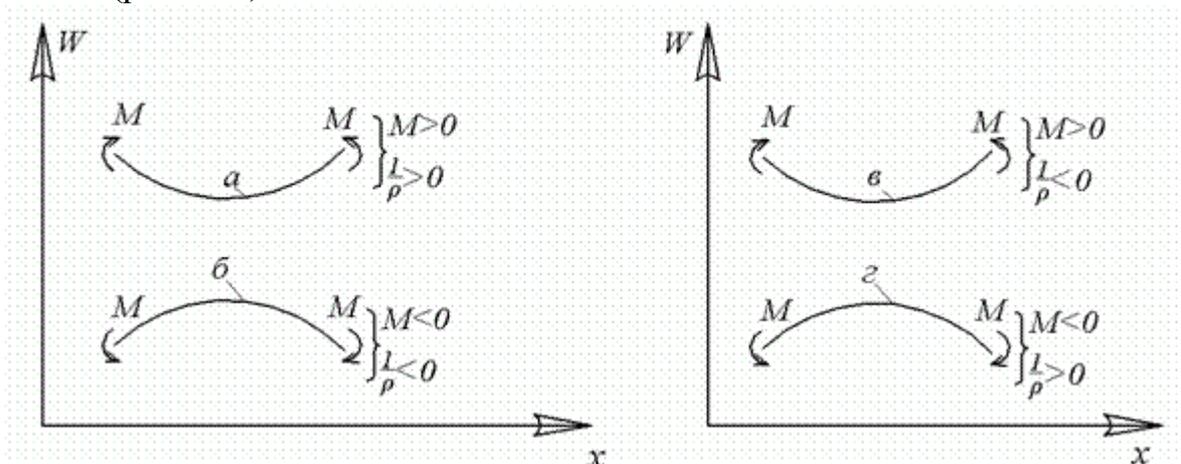


Рис. 13. Правило знаків

Зберігаючи прийнятий напрямок осі w вгору, маємо відповідність між знаком моменту й знаком кривизни, тому можна прирівняти праві частини:

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

Якби вісь w була спрямована донизу, то в правій частині варто було б поставити знак мінус.

Отримане рівняння називають **точним рівнянням вигнутої осі бруса**. Воно є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку,

інтегрування якого, як відомо, має значні труднощі. У зв'язку з цим і тому що в переважній більшості розглянутих на практиці завдань прогини малі, точне рівняння заміняють наближеним рівнянням – рівнянням для малих переміщень.

У знаменнику рівняння стоїть сума двох доданків:

$$1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = 1 + tg^2 \theta.$$

За малих деформацій величина другого доданка в багато разів менше першого. Дійсно, за розрахунку звичайних машинобудівних або будівельних елементів норми допустимого прогину становлять 1/100–1/1000 прольоту залежно від умов роботи балки, а кути повороту, що виходять при цьому, не перевищують 10.

Навіть, прийнявши більшу межу для прогину ($f=1/100$), найбільшу величину тангенса θ одержимо наступного порядку:

$$tg \theta \approx tg 1^\circ \approx 0,02.$$

Таким чином, значення $tg^2 \theta$ не перевершує 0,0004, тобто досить мало порівняно з одиницею. Цими величинами й можна зневажити без відчутної для практичних цілей помилки. Тоді одержимо таке спрощене диференціальне рівняння пружної лінії:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)},$$

у якому величина згинального моменту обчислюється для недеформованої балки. Надалі це рівняння будемо називати **основним диференціальним рівнянням пружної лінії** (для малих деформацій). З його допомогою можна обчислювати переміщення в балках за будь-яких умов навантаження.

Вирішуючи завдання аналітичним методом, кути повороту $\theta(x)$ й прогини $w(x)$ обчислюють послідовним інтегруванням основного диференціального рівняння. Проінтегрувавши рівняння перший раз, одержимо вираз для кута повороту $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + C,$$

утримуюче одну довільну постійну C .

Інтегруючи другий раз, знаходимо вираз для прогину $w(x)$:

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + Cx + D,$$

який має довільні постійні C і D .

Значення постійних C і D визначають із умов закріплення балки в такий спосіб:

а) якщо балка має на кінці закладення (рис. 14), то прогин і кут повороту в ній дорівнюють нулю:

$$w_B = 0; \quad \theta_B = 0;$$

б) для балки на двох шарнірних опорах (рис. 11) прогини на цих опорах дорівнюють нулю:

$$w_A = 0; \quad w_B = 0.$$

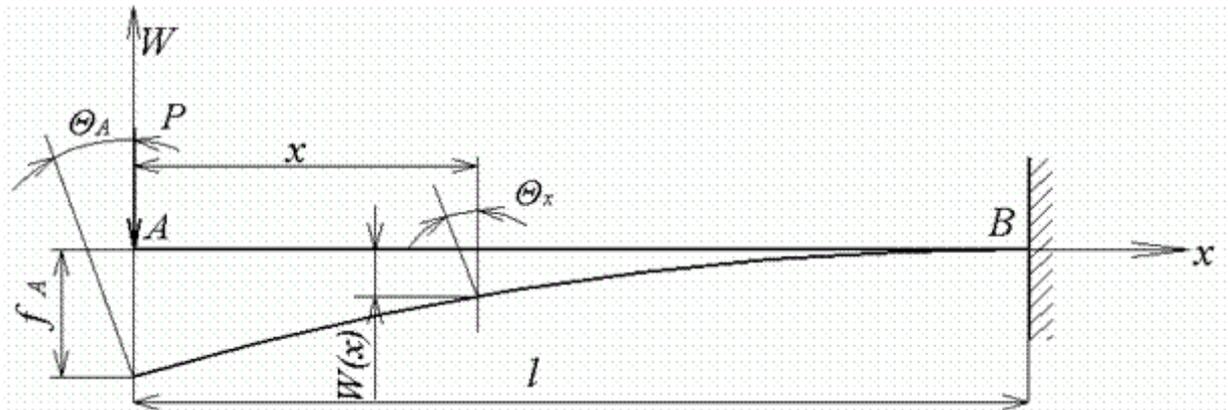


Рис. 14. Консольна балка

Зауважимо, що рівняння пружної лінії іноді зручно записати в іншій формі, вважаючи заданим не момент $M(x)$, а навантаження $q(x)$.

Згадавши, що $d^2M/dx^2 = q(x)$, і продиференціювавши рівняння два рази, одержимо:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x).$$

Рівняння пружної лінії у формі застосовують за розрахунку балок на пружній основі й розгляду коливань балок.

Запитання для самоконтролю

1. Яку деформацію називають згином?
2. Що називають балкою?
3. Який згин називають чистим, а який поперечним?
4. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечних перерізах за згину?
5. Чому дорівнює поперечна сила і згинальний момент у перерізі балки?
6. Сформулюйте правило знаків для поперечних сил і згинальних моментів.
7. Яка диференційна залежність існує між згинальним моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження?
8. Укажіть послідовність побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів.
9. Який взаємозв'язок існує між видами епюр і навантаженням?
10. Які напруги виникають у поперечному перерізі балки за чистого згину?
11. Які припущення вводять під час доказу розрахункових формул?
12. Які волокна розтягуються за згину, а які стискаються?
13. Що називають нейтральним шаром і нейтральною віссю?
14. За якою формулою визначають максимальні нормальні напруги?
15. Що називають моментом опору за згину?

16. За якими формулами визначають моменти опору для прямокутника і круга?
17. Чи однаковий вираз має умова міцності для пластичного і крихкого матеріалу за згину?
18. Яку деформацію спричиняють дотичні напруження за згину?
19. Як читають формулу Журавського?
20. Як розподіляють дотичні напруження на перерізі балки?
21. Що розуміють під розрахунком балок на жорсткість за згину?
22. Що називають прогином балки та стрілою прогину?
23. Що називають кутом повороту перерізу?
24. За якими формулами визначають кут повороту і прогин балки?

Тема 7. Теорії міцності

План

1. Складне навантаження бруса. Еквівалентні напружені стани та еквівалентні напруження
2. Теорії міцності
3. Розрахунок бруса круглого поперечного перерізу на згин з крученням

1. Складне навантаження бруса. Еквівалентні напружені стани та еквівалентні напруження

На практиці можливі випадки, коли під дією зовнішніх сил матеріал зазнає розтягу або стиску у двох і трьох напрямках, тобто матеріал перебуває в умовах **складного (плоского або об'ємного) напруженого стану**.

У напруженому тілі у двох взаємно перпендикулярних площадках діють **найбільші та найменші** напруги, яких називають **головними**. У цих площадках немає дотичних на пруг, тому їх називають головними.

У напруженому тілі можна виділити елементарний кубик, уздовж граней якого діятимуть лише головні нормальні напруги: найбільша за алгебраїчною величиною σ_1 , проміжна σ_2 і найменша σ_3 .

За розрахунку конструктивних елементів на міцність розрізняють **три види напруженого стану**:

- *об'ємний, коли всі три головні напруги не дорівнюють нулю;*
- *плоский, коли одна головна напруга дорівнює нулю;*
- *лінійний, коли дві головні напруги дорівнюють нулю.*

Досі розглядали випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах бруса виникають тільки нормальні напруги, які в кожній точці можна було додавати алгебраїчно.

Проте часто трапляються і мають велике практичне значення випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах виникають нормальні і дотичні напруги, розподілені нерівномірно і за різними законами.

У таких випадках дослідно визначити величини, що характеризують міцність, неможливо, тому для оцінювання міцності деталі доводиться враховувати механічні характеристики цього матеріалу, добуті з діаграми розтягу.

Як відомо, міцність пластичних матеріалів на розтяг характеризують границею текучості, а крихких – границею міцності; ці напруги вважають граничними і залежно від них обчислюють допустимі напруги. Тому граничний напружений стан у пластичних матеріалів настає за появи залишкових деформацій, а крихких на початку руйнування.

Основне завдання теорії граничних напруг складається в розробці припущень, які дозволяють порівняти різнотипні напружені стани з точки зору близькості їх до граничного стану. Порівняння різнотипних напружених станів виконують за допомогою *еквівалентного напруженого стану*, а за еквівалентний береться найбільш вивчений напружений стан за простого розтягу.

Еквівалентною напругою називають таку умовну напругу одновісного розтягу, яка рівнонебезпечна заданому випадку поєднання основних деформацій.

2. Теорії міцності

Перехід до еквівалентного напруженого стану виконують за допомогою гіпотез міцності.

Гіпотези міцності – це наукові припущення про основні причини настання у матеріалі граничного напруження стану за поєднання основних деформацій.

Напружені стани під час поєднання основних деформацій і одновісного розтягу називатимемо рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо їх головні напруги відрізняються від граничної для цього матеріалу в однакову кількість разів, інакше кажучи, коефіцієнти запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Оцінювання міцності за теорією граничних напруг відбувається за такою схемою: перехід від складного напруженого стану до еквівалентного за допомогою гіпотез міцності, а потім еквівалентний напружений стан зіставляють з допустимою напругою на розтяг.

Таким чином, умова міцності для випадку поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах діють нормальні і дотичні напруги, матиме вигляд $\sigma_{екв} \leq [\sigma_p]$.

Сформулюємо і охарактеризуємо гіпотези міцності і наведемо відповідні формули для обчислення еквівалентних напруг.

1. Гіпотеза найбільших нормальних напруг (перша теорія міцності), була висунута Галілеєм у XVII столітті.

Причиною руйнування за цією гіпотезою є найбільші нормальні напруги розтягу σ_p і стиску σ_c , без врахування двох інших головних напруг.

Ця теорія дає досить задовільні результати тільки за розрахунку конструктивних елементів з крихких матеріалів.

Істотним протиріччям першої теорії міцності є те, що кубик за всебічному стиску, як показали досліди, витримує набагато більші напруги, ніж за простого стиску.

2. Гіпотеза найбільших відносних деформацій (друга теорія міцності) висунута в 1682 році Е. Маріоттом.

За цією теорією міцність матеріалу досягне критичного стану за максимального значення лінійної деформації ε . Цю теорію міцності для пластичних матеріалів не підтверджують досліди, але для крихких матеріалів її результативно узгоджено експериментом.

3. Гіпотеза найбільших дотичних напруг (третья теорія міцності).

Згідно з цією гіпотезою, яку запропонував у 1773 році Ш. Кулон, небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільші дотичні напруги досягають граничної величини, за якої можлива втрата міцності шляхом зсуву і ковзання однієї частини матеріалу по другій.

Гіпотеза найбільших дотичних напруг добре підтверджують досліди, особливо для пластичних матеріалів.

За цією гіпотезою для триосного напруженого стану $\sigma_{\text{екв.}} = \sigma_1 - \sigma_3$;

Для двоосного напруженого стану: $\sigma_{\text{екв.}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$.

Тотожна з третьою теорією міцності **гіпотеза Мора**, яку запропоновано на початку ХХ ст. Згідно з цією гіпотезою небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли на деякій площадці трапляється найбільш несприятлива комбінація нормальної і дотичної напруг.

4. Енергетична гіпотеза (четверта, або енергетична, теорія міцності).

Під час деформації елементарної частинки тіла в загальному випадку змінюються його форму і об'єм. Таким чином, повна потенціальна енергія деформації складається з двох частин: енергії зміни форми і енергії зміни об'єму. Енергетична гіпотеза міцності за критерій переходу матеріалу до граничного стану приймає тільки енергію зміни форми.

Згідно з цією гіпотезою, яку запропоновано на початку ХХ ст., небезпечний стан матеріалу в цій точці настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми для цієї точки досягає граничної величини.

Формула для обчислення еквівалентних напруг для двоосного напруженого стану: $\sigma_{\text{екв.}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$.

Розрахунки за гіпотезами міцності в багатьох випадках позбавляють проектувальників і конструкторів необхідності випробовувань конструкції на міцність.

3. Розрахунок бруса круглого поперечного перерізу на згин з крученням

Одноточасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які зазвичай є прямими брусами круглого або кільцевого перерізу. Для розрахунку валів братимемо до уваги тільки **крутний і згинальний моменти**, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

Максимальні нормальні і дотичні напруження для круглих валів обчислюють за формулами: $\sigma = \frac{M_{zz}}{W_x}$, $\tau = \frac{M_K}{W_p}$, причому для круглих валів $W_p = 2W_x$.

У випадку одночасного згину і кручення небезпечними будуть точки небезпечного поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності, дістанемо:

$$\sigma_{екв.} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{zz}}{W_x}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_K}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{zz}}{W_x}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_K}{2 \cdot W_x}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{zz}^2 + M_K^2}}{W_x}$$

Вираз, що стоїть в чисельнику, назвемо **еквівалентним моментом**:

$$M_{екв.} = \sqrt{M_{zz}^2 + M_K^2}$$

тоді розрахункова формула для круглих валів матиме вигляд:

$$\sigma_{екв.} = \frac{M_{екв.}}{W_x} \leq [\sigma]$$

За цією формулою круглі вали розраховують, як на згин, але не за згинальним, а за еквівалентним моментом.

За енергетичною теорією міцності $M_{екв.} = \sqrt{M_{zz}^2 + 0,75 \cdot M_K^2}$.

Приклад розв'язку задачі

Для сталевого вала постійного поперечного перерізу рис. 1, який передає потужність $P = 8$ кВт, за кутової швидкості $\omega = 23$ с⁻¹ необхідно: побудувати епюру крутних моментів; побудувати епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах; визначити необхідний діаметр вала.

Розрахунок виконати за гіпотезою найбільших дотичних напружень. Прийняти $Fr = 0,37 \cdot F$, $[\sigma] = 55$ МПа.

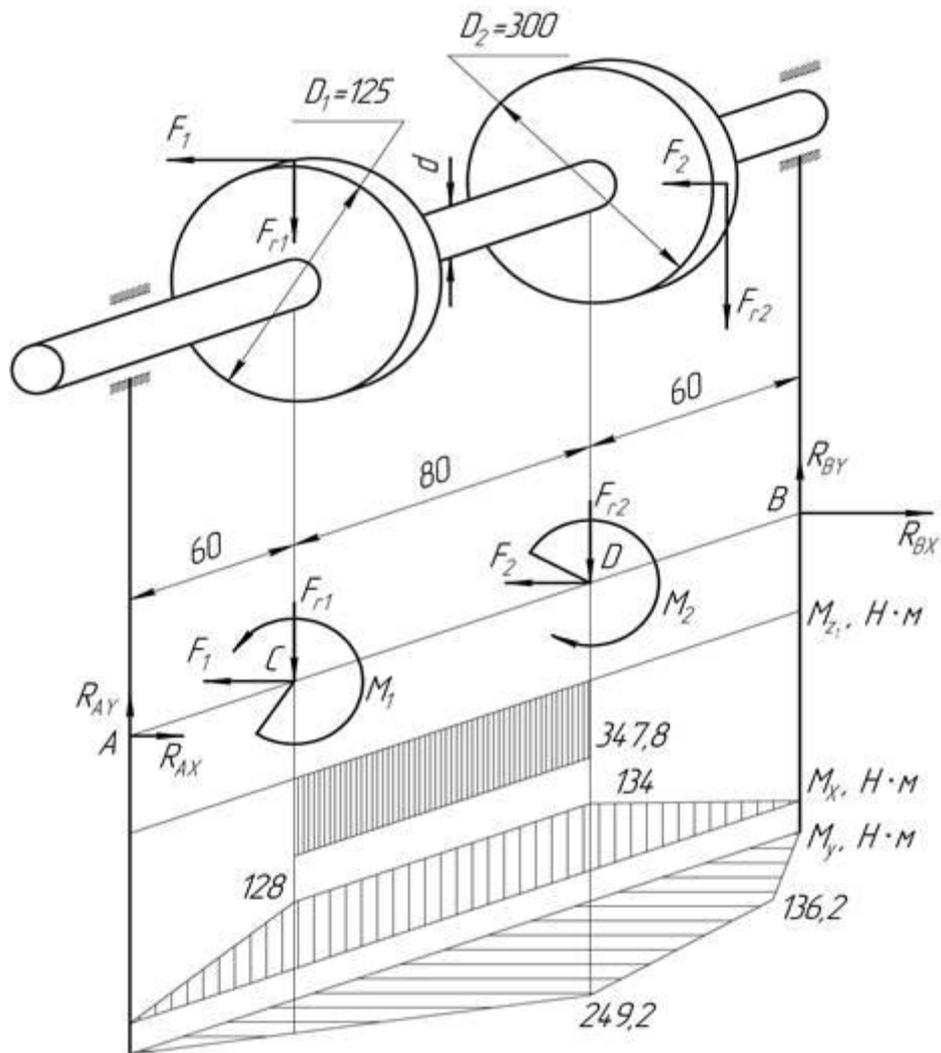


Рис. 1

Розв'язок

1) Визначаємо обертальний момент, що передає вал:

$$M_1 = M_2 = \frac{P}{\omega} = \frac{8 \cdot 10^3}{23} = 347,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2) Визначаємо колові сили, що діють на зубчасті колеса:

$$F_1 = \frac{2 \cdot M_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 347,8}{0,125} = 5565 \text{ Н}; \quad F_2 = \frac{2 \cdot M_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 347,8}{0,3} = 2319 \text{ Н}$$

3) Визначаємо радіальні зусилля:

$$F_{r1} = 0,37 \cdot F_1 = 0,37 \cdot 5565 = 2059 \text{ Н}; \quad F_{r2} = 0,37 \cdot F_2 = 0,37 \cdot 2319 = 858 \text{ Н}$$

Складаємо розрахункову схему вала (рис. 1).

4) Визначаємо реакції опор у вертикальній площині:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -F_{r1} \cdot AC - F_2 \cdot AD + R_{BY} \cdot AB = 0; \\ \sum M_B &= F_{r1} \cdot CB + F_2 \cdot DB - R_{AY} \cdot AB = 0 \end{aligned}$$

$$R_{BY} = \frac{F_{r1} \cdot AC + F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{2059 \cdot 0,06 + 2319 \cdot 0,14}{0,2} = 2241 \text{ H};$$

$$R_{AY} = \frac{F_{r1} \cdot CB + F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{2059 \cdot 0,14 + 2319 \cdot 0,06}{0,2} = 2137 \text{ H}$$

Перевірка: $\sum F_Y = R_{AY} - F_{r1} - F_2 + R_{BY} = 2137 - 2059 - 2319 + 2241 = 0$.

Рівність $\sum F_Y = 0$, отже R_{AY} і R_{BY} визначені правильно.

5) Визначаємо реакції опор у горизонтальній площині:

$$\sum M_A = F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_{BX} \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_B = -F_1 \cdot CB - F_{r2} \cdot DB + R_{AX} \cdot AB = 0$$

$$R_{BX} = \frac{F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{5565 \cdot 0,06 + 858 \cdot 0,14}{0,2} = 2270 \text{ H};$$

$$R_{AX} = \frac{F_1 \cdot CB + F_{r2} \cdot DB}{AB} = \frac{5565 \cdot 0,14 + 858 \cdot 0,06}{0,2} = 4153 \text{ H}$$

Перевірка: $\sum F_X = -R_{AX} + F_1 + F_{r2} - R_{BX} = -4153 + 5565 + 858 - 2270 = 0$.

Рівність $\sum F_X = 0$, отже R_{AX} і R_{BX} визначені правильно.

6) Будуємо епюру крутних моментів MZ .

7) Визначаємо значення згинальних моментів MX у характерних перерізах у вертикальній площині і будуємо їх епюру:

$$M_{AX} = 0; \quad M_{CX} = R_{AY} \cdot AC = 2137 \cdot 0,06 = 128,22 \text{ H} \cdot \text{м}$$

$$; \quad M_{DX} = R_{AY} \cdot AD - F_{r1} \cdot CD = 2137 \cdot 0,14 - 2059 \cdot 0,08 = 134 \text{ H} \cdot \text{м}; \quad M_{BX} = 0$$

8) Визначаємо значення згинальних моментів MU у характерних перерізах у горизонтальній площині і будуємо їх епюру:

$$M_{AY} = 0; \quad M_{CV} = -R_{AX} \cdot AC = -4153 \cdot 0,06 = -249,2 \text{ H} \cdot \text{м}$$

$$; \quad M_{DV} = -R_{AX} \cdot AD + F_1 \cdot CD = -4153 \cdot 0,14 + 5565 \cdot 0,08 = -136,2 \text{ H} \cdot \text{м}; \quad M_{BY} = 0$$

9) Визначаємо сумарні згинальні моменти в характерних перерізах вала:

$$M_{\Sigma C} = \sqrt{M_{CX}^2 + M_{CV}^2} = \sqrt{128,22^2 + (-249,2)^2} = 280 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$M_{\Sigma D} = \sqrt{M_{DX}^2 + M_{DV}^2} = \sqrt{134^2 + (-136,2)^2} = 191 \text{ H} \cdot \text{м}$$

10) Оскільки значення сумарного згинального моменту в перерізі C більше ніж у перерізі D , то переріз C є більш небезпечним. Тому еквівалентний момент визначаємо у перерізі C :

$$M_{\text{екв.}C}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\Sigma C}^2 + M_Z^2} = \sqrt{280^2 + 347,8^2} = 446,5 \text{ H} \cdot \text{м}$$

11) Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{max}C}}{0,1 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{446,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 55}} = 43,2 \text{ мм}$$

Приймаємо діаметр вала $d = 45 \text{ мм}$.

Запитання для самоконтролю:

1. Які існують три види напруженого стану за розрахунку на міцність?
2. Що називають об'ємним напруженим станом?
3. Що називають плоским напруженим станом?
4. Що називають лінійним напруженим станом?
5. Що називають еквівалентною напругою?
6. Які існують гіпотези міцності?
7. Сформулюйте гіпотезу найбільших нормальних напруг (I теорія).
8. Сформулюйте гіпотезу найбільших відносних деформацій (II теорія).
9. Сформулюйте гіпотезу найбільших дотичних напруг (III теорія).
10. Сформулюйте енергетичну гіпотезу (IV теорія).
11. Що таке еквівалентний момент?
12. Назвіть умову міцності для розрахунку бруса круглого поперечного перерізу на згин з крученням.

Тема 8. Стійкість стиснених стрижнів

План

1. Критична сила. Формула Ейлера для різних випадків закріплення опор
2. Критичне напруження. Емпіричні формули для визначення критичних напружень. Залежність критичних напружень від гнучкості стрижня
3. Розрахунки на стійкість за формулою Ейлера. Раціональні форми поперечних перерізів стиснених стрижнів

1. Критична сила. Формула Ейлера для різних випадків закріплення опор

Не завжди достатня міцність і жорсткість стрижня забезпечують його повну надійність. З історії техніки можна навести багато прикладів, коли причиною аварій інженерних конструкцій була втрата стійкості її стиснених елементів.

Навантаження, за яких втрачається стійкість, називають **критичними**, а відповідні стани – **критичними станами**. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стрижнів, пластинок і оболонок.

Критичною силою називають найбільше значення стискальної сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стрижня є стійкою.

Згин, пов'язаний з втратою стійкості прямолінійної форми стрижня, називають **поздовжнім згином**.

Якщо стискальні сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруги згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискальна сила F , яка діє на стрижень, була меншою за критичну.

Позначимо допустиму стискальну силу $[F]$, тоді:

$$[F] = \frac{F_{кп}}{[n_{см}]},$$

де $[n_{см}]$ – допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Значення коефіцієнта запасу міцності залежить від призначення стрижня і його матеріалу.

$$[n_{см}] = 1,8 \div 3 \quad \text{– для сталей};$$

$$[n_{см}] = 5 \div 5,5 \quad \text{– для чавунів};$$

$$[n_{см}] = 2,8 \div 3,2 \quad \text{– для дерева.}$$

Леонард Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили:

$$F_{кп} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де E – модуль пружності першого роду;

J_{min} – найменший з осевих моментів інерції перерізу, оскільки стрижень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитися, стискаючи поздовжньою силою лінійку;

l – довжина стрижня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стрижня.

На рис. 1 зображено **способи кріплення кінців стрижня**, які найчастіше застосовують, і наведено значення μ :

- 1) обидва кінці стрижня закріплені шарнірно і можуть зближуватися (а);
- 2) нижній кінець жорстко закріплений, верхній вільний (б);
- 3) один кінець закріплений шарнірно, другий має «плаваюче» кріплення (в);
- 4) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення (г);
- 5) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися (д);
- 6) нижній кінець закріплений жорстко, верхній – шарнірно (є);

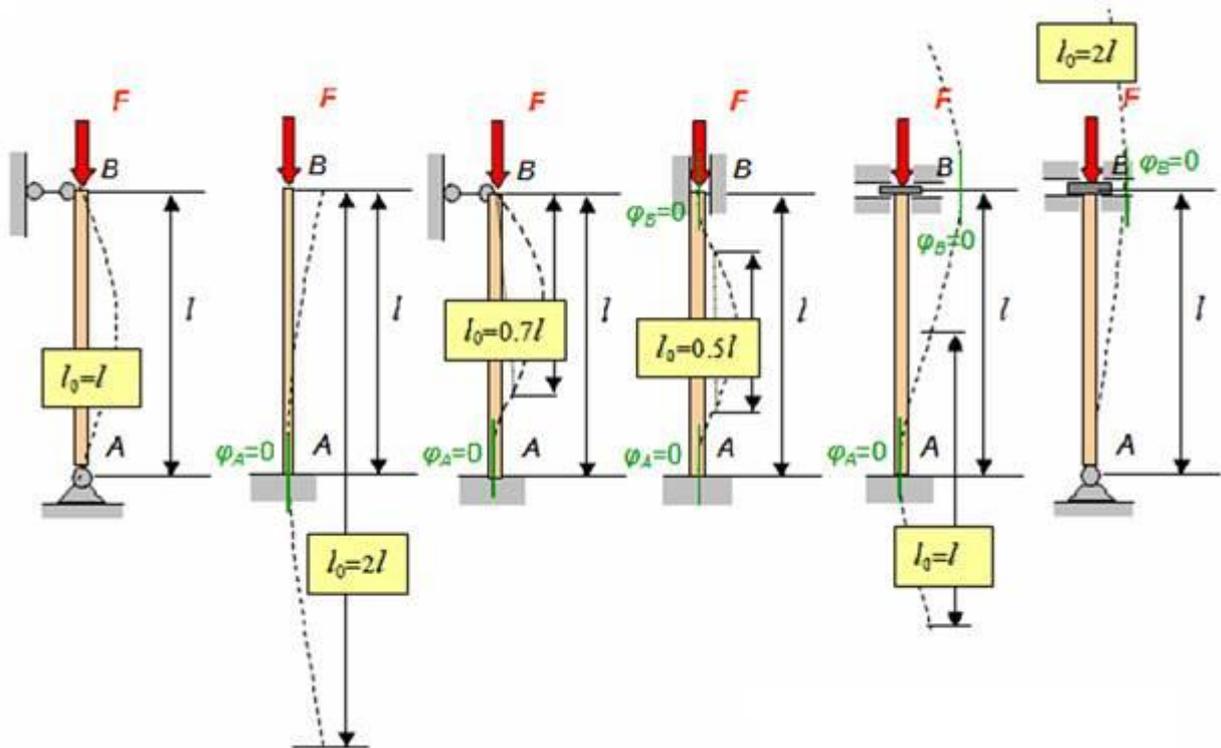


Рис. 1

Зазначимо, що менше μ , то більша критична сила, а отже, і допустиме стискальне навантаження. Наприклад, стискальне навантаження стрижня, жорстко закріпленого обома кінцями ($\mu = 0,5$), може бути в 16 разів більше від навантаження стрижня, закріпленого одним кінцем ($\mu = 2$). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити обидва кінці стрижня.

2. Критичне напруження. Емпіричні формули для визначення критичних напружень. Залежність критичних напружень від гнучкості стрижня

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, поки напруга не перевищує границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися незавжди. Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичну напругу $\sigma_{кр}$, тобто напругу, яка виникає у поперечному перерізі стрижня під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A},$$

$\sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = i_{\min}$ – найменший радіус інерції поперечного перерізу стрижня.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}\right)^2},$$

Перепишемо формулу для $\sigma_{кр}$ так:

$$\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \lambda$$

вираз $\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$ гнучкість стрижня, це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стрижня і способу закріплення його кінців.

Формула критичної напруги:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq [\sigma_{пл}],$$

де: $[\sigma_{пл}]$ – границя пропорційності матеріалу стрижня.

$$\lambda_{\text{зр}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{ли}}}} \quad \text{– гранична гнучкість.}$$

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стрижня і стала для цього матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді $\lambda \geq \lambda_{\text{зр}}$, тобто формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стрижня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Обчислимо, як приклад, значення $\lambda_{\text{зр}}$ для маловуглецевої сталі Ст.3. Для сталі Ст.3 $[\sigma_{\text{ли}}] = 200 \text{ МПа}$, а $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, тоді:

$$\lambda_{\text{зр}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} = 100$$

Для стрижнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість $\lambda_{\text{кр}} = 100$. Аналогічно можна обчислити значення граничної гнучкості для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_{\text{кр}} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{\text{кр}} = 110$.

Якщо гнучкість стрижнів менша від наведених величин, то формулу Ейлера вже не застосовують і в розрахунках користуються формулою Ясинського:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - e \cdot \lambda$$

де a і e – коефіцієнти, які залежать від матеріалу; їх беруть з довідкових таблиць. Якщо гнучкість $\lambda_{\text{кр}} < 40$, стрижні можна розраховувати на міцність під час простого стискання, не враховуючи небезпеку поздовжнього згину,

тобто за формулою: $\sigma = \frac{F}{A}$.

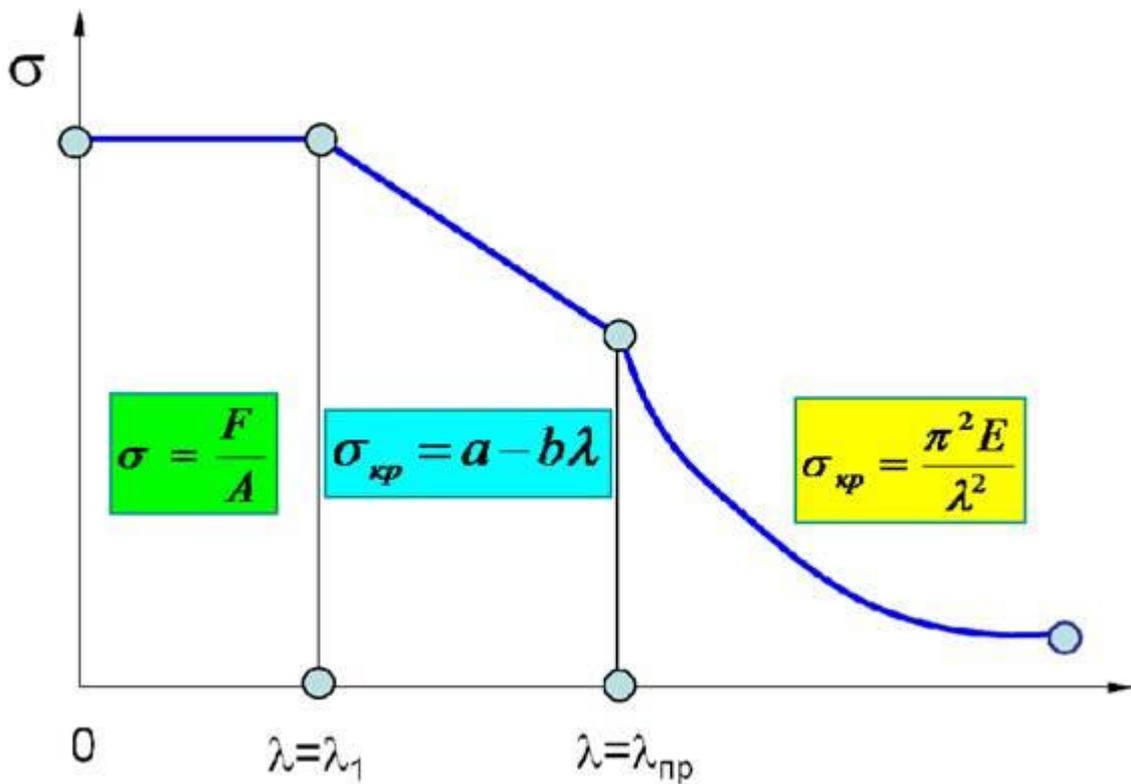


Рис. 2

Отже, за малих значень $\lambda_{кр}$ ($\lambda_{кр} < 40$) стрижні з маловуглецевої сталі розраховують на просте стискання; за середніх значень ($40 \leq \lambda_{кр} < 100$) розраховують за формулою Ясинського, а за великих ($\lambda_{кр} \geq 100$) – за формулою Ейлера.

Графік залежності критичної напруги від гнучкості для стрижнів з маловуглецевої сталі зображено на рис. 2. Зазначимо, що:

1) за малих значень $\lambda_{кр}$ критична напруга $\sigma_{кр}$ дорівнює границі текучості σ_T ;

2) за середніх значень $\lambda_{кр}$ критична напруга менше від границі текучості σ_T , але більше, ніж границя пропорційності ($\sigma_{пл} < \sigma_{кр} < \sigma_T$);

3) за великих значень $\lambda_{кр}$ критична напруга менша від границі пропорційності.

3. Розрахунки на стійкість за формулою Ейлера. Раціональні форми поперечних перерізів стиснених стрижнів

Розрізняють три види розрахунків на стійкість:

1) **Перевірний розрахунок**, коли визначають коефіцієнт запасу стійкості n_{cm} і порівнюють знайдене значення з допустимим

$$n_{cm} = \frac{F_{кр}}{F} \geq [n_{cm}]$$

$[n_{cm}]$;

2) **Визначення допустимого навантаження**: $[F] = \frac{F_{кр}}{[n_{cm}]}$;

3) **Проектний розрахунок**, коли визначають потрібне значення мінімального моменту інерції поперечного перерізу стрижня:

$$J_{min} \geq \frac{F \cdot [n_{cm}] \cdot (\mu \cdot \lambda)^2}{\pi^2 \cdot E},$$

після чого знаходять гнучкість і порівнюють з граничною.

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стрижнів на стиск є кільцеві і коробочні тонкостінні перерізи. Доведено, що заміна стиснених стрижнів у вигляді кутників і двотаврів трубчастими стрижнями дає економію матеріалу до 20... 40 %.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають критичним станом?
2. Що називають критичною силою?
3. Що називають поздовжнім згином?
4. Якою має бути стискальна сила, щоб забезпечити стійкість стрижня?
5. Який вигляд має формула Ейлера для визначення критичної сили?
6. Від чого залежить значення коефіцієнта запасу міцності?
7. Які існують способи кріплення кінців стрижня?
8. За якою формулою знаходять гнучкість стрижня?
9. Який вигляд має формула Ейлера для визначення критичної напруги?
10. Який вигляд має формула Ясинського для визначення критичної напруги?
11. Укажіть межі застосування формули Ейлера.
12. Які існують види розрахунку стрижнів на стійкість?

ЛІТЕРАТУРА

1. Шваб'юк В.І. Опір матеріалів: Підручник. – К.: Знання, 2016. — 400 с.
2. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вища школа. 2004. – 655с.
3. Дяченко С.С. Фізичні основи міцності та пластичності металів: Навч. посібник – Харків: Видавництво ХНАДУ, 2003. – 226 с.
4. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
5. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Статика. Кінематика / для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолюк, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: <http://moodle.udc.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=345>.
6. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Динаміка та аналітична механіка/ для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолюк, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: <http://moodle.udc.ntukpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=591>.
7. Опір матеріалів. Розрахункові роботи. Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофєєв О.А. //Навчальний посібник. – Львів: «Афіша». 2002. – 280 с.

Опір матеріалів [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня «фаховий молодший бакалавр», з спеціальності *G 19 Будівництво та цивільна інженерія, ОПП «Будівництво та експлуатація будівель споруд»* денної форми навчання / уклад. Т.П. Герасимик-Чернова – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ», 2025. –70 с.

Комп'ютерний набір і верстка:

Т.П. Герасимик-Чернова,

Редактор:

Т.П. Герасимик-Чернова,

Підп. до друку _____ 2025 р. Формат А4.

Папір офіс. Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. _____

Обл. вид. арк. _____ Тираж 15 прим.