

Міністерство освіти і науки України
Відокремлений структурний підрозділ
«Любешівський технічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»



ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр

спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»

галузь знань 19 «Архітектура та будівництво»

ОПП: «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн»

ОПП «Будівництво та експлуатація будівель та споруд»

УДК

Т

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ»

_____ Герасимик-Чернова Т.П.

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу

Бібліотекар _____ М.М. Деміх

Затверджено методичною радою ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ» протокол № _____ від «_____» _____ 2022 р.

Рекомендовано до видання на засіданні циклової методичної комісії викладачів будівельного профілю

протокол № _____ від «_____» _____ 2022 р.

Голова циклової методичної комісії _____ Данилік С.М.

Укладач: _____ Я.В. Оласюк, викладач вищої категорії

Рецензент: _____ А.В. Хомич, к. т. н.

Відповідальний за випуск: _____ Данилік С.М. викладач вищої категорії, голова циклової методичної комісії викладачів будівельного профілю.

Теоретична механіка [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» галузь знань 19 «Архітектура та будівництво» ОПП: «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн» ОПП «Будівництво та експлуатація будівель та споруд»/уклад. Я.В. Оласюк – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ», 2022. – 106 с

В конспекті лекцій дається матеріал з курсу дисципліни по розділах статика, кінематика та динаміка.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	
1. Основні поняття та аксіоми статички.....	
2. Плоска система збіжних сил.....	
3. Пара сил.....	
4. Плоска система довільно розміщених сил.....	
5. Центр ваги	
6. Стійкість рівноваги.....	
7. Основні поняття кінематики	
8. Кінематика точки.....	
9. Поступальний та обертальний рух твердого тіла	
10. Основні поняття динаміки	
11. Рух матеріальної точки. Принцип д'Аламбера	
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	

ВСТУП

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Вона належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство вивчає різні форми руху матерії. Теоретична механіка має велике значення в підготовці інженерних кадрів. Вона є фундаментом для вивчення таких дисциплін, як опір матеріалів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеро- і гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування рухомими об'єктами, теорія механізмів і машин, приладів, роботів-маніпуляторів. Знання законів теоретичної механіки дає змогу науково передбачити хід процесів у нових задачах, що виникають при розвитку науки, техніки і технології.

Теоретична механіка – це наука, яка дає універсальні методи складання і аналізу рівнянь руху і рівноваги складних матеріальних систем, що є основою їх моделювання.

Теоретична механіка спирається на знання з аналітичної геометрії, векторної алгебри, математичного аналізу, фізики та інформатики.

Цей навчально-методичний посібник призначений для самостійного оволодіння студентами технічних спеціальностей безвідривної форми навчання факультету післядипломної освіти і заочного навчання курсу теоретичної механіки та виконання індивідуальних завдань для контрольних робіт, які дозволяють закріпити пройдений матеріал курсу.

Теоретична механіка поділяється на три частини: статика, кінематика, динаміка. Статика вивчає умови рівноваги тіл. Кінематика розглядає рух без урахування чинників, що його породжують. Динаміка вивчає рух залежно від чинників, що його викликають, – від взаємодії з іншими тілами.

Лекція 1.

Тема: Основні поняття та аксіоми статички

Теоретична механіка – це природнича наука, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних об'єктів (тіл і механічних систем).

Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну положень матеріальних тіл у просторі протягом часу.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико–математичного циклу і є фактично науковою базою всіх галузей сучасної, зокрема, сільськогосподарської техніки.

Традиційно теоретична механіка ділиться на три основні розділи: статика, кінематика та динаміка.

Статика вивчає властивості сил, умови їх перетворення і спільної дії на тіло або на систему тіл, рівновагу тіл під дією сил.

Кінематика вивчає геометричні властивості руху матеріальних тіл без врахування маси і діючих сил.

Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією сил, які цей рух обумовлюють.

Згадаємо основні поняття теоретичної механіки, які добре відомі з курсу фізики.

Матеріальна точка – це тіло певної маси, розмірами та формою якого можна в умовах даної задачі нехтувати.

Система матеріальних точок – це сукупність точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, в якому відстані між двома довільними точками не змінюються з часом, простіше, що це тіло, яке не деформується під дією сил.

Цілком зрозуміло, що в природі та техніці не існує реальних тіл, які повністю відповідають цим поняттям. Матеріальна точка, система матеріальних точок та тверде тіло є ідеальними поняттями, розрахунковими моделями при вивченні механіки.

СТАТИКА

Перш ніж вивчати перший розділ теоретичної механіки статику сформулюємо задачі статички. Такими є:

1) визначення умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;

2) визначення методів перетворення систем сил з метою спрощення і заміни їх найменшою кількістю силових факторів.

В основі цього розділу механіки покладені аксіоми статички, які нижче будуть розглянуті. А зараз розглянемо її основні поняття.

Сила – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, величину та напрямок взаємодії.

З цього класичного визначення сили випливає, що вона є величиною векторною, а тому є три визначальних параметри: величина сили (або модуль), напрямок дії та точка прикладання.

На розрахунково – силових схемах силу зображують у вигляді вектора довільної довжини (крім випадків графічної статички, коли силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 1.1) довільну силу \vec{P} , яка зображена у вигляді вектора \overline{AB} , прикладена у точці A і діє вздовж лінії MN .

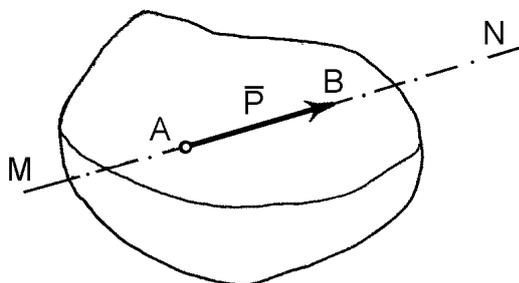


Рис. 1.1

Одиницею вимірювання сили є 1 Ньютон – $[H]$ або 1 кілоньютон $[кН]$. $1 [кН] = 1000 [H]$. У технічній системі одиницею вимірювання сили є 1 кілограм сили – $[кГ]$ або $[кгс]$.

На тіло можуть одночасно діяти декілька сил, утворюючи систему.

Система сил – це сукупність декількох сил, які діють на тіло.

Введемо ще деякі поняття, що пов'язані з силою.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які на одне і теж тіло діють однаково. Система сил може бути, в деяких випадках, еквівалентна нулю.

Рівнодійна сила системи сил – це така сила, дія якої еквівалентна дії всієї системи сил.

Зрівноважуюча сила – це сила, яка за величиною дорівнює рівнодійній силі, лежить з нею на одній прямій, але протилежна за напрямком.

Аксиоми статички

В основу статички покладені аксіоми, тобто положення, які приймаються без доведення, тому що підтверджуються багатовіковою практикою.

I аксіома. Абсолютно тверде тіло під дією двох сил тільки тоді буде перебувати в рівновазі, коли їх вектори дорівнюють за модулем, протилежні за напрямком і лінії їх дії співпадають.

На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , які мають однакові модулі $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2|$, розташовані на одній прямій MN і мають протилежні напрямки. Точки прикладання сил можуть співпадати. Таким чином, $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

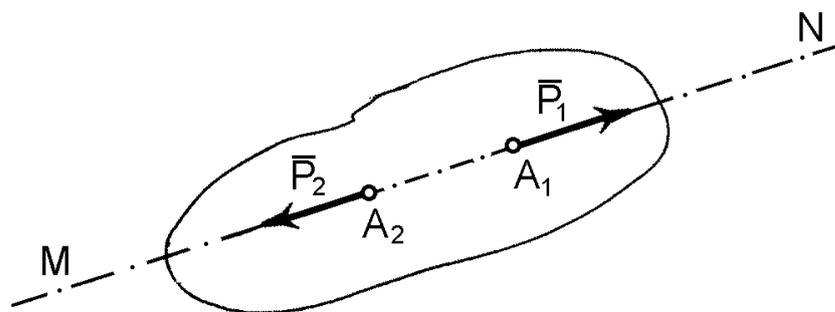


Рис. 1.2

II аксіома. Стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил. Наприклад, систему сил (\vec{P}_1, \vec{P}_2) на рис. 1.2. Ця аксіома носить назву аксіоми виключення сил.

Наслідок з перших двох аксіом. Точку прикладання сили можна пересувати в межах даного тіла вздовж лінії дії сили (сила є ковзним вектором).

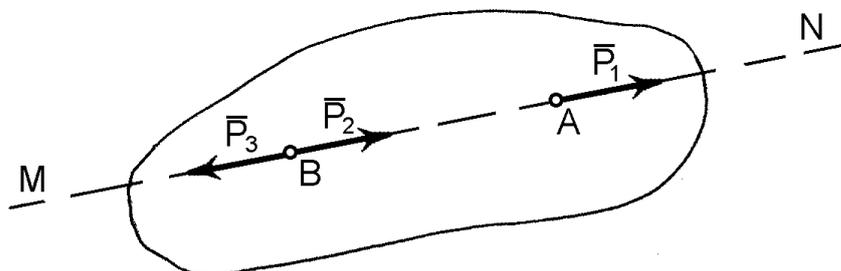


Рис. 1.3

Припустимо, що на тіло (рис. 1.3) діє вектор сили \vec{P}_1 , який прикладений в точці A і має лінію дії MN . Прикладемо в довільній точці B на лінії дії MN дві сили \vec{P}_2 і \vec{P}_3 , такі, що $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$, а $\vec{P}_3 = -\vec{P}_1$. Згідно першої аксіоми ці сили зрівноважені, а згідно другої аксіоми їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по іншому: як силу \vec{P}_2 , яка дорівнює силі \vec{P}_1 і перенесена з точки A в точку B , і зрівноважену систему двох сил (\vec{P}_1 і \vec{P}_3), яку можна відкинути.

III аксіома. Рівнодійна двох сил, які прикладені до тіла в одній точці, зображується діагоналлю паралелограма, який побудований на цих силах, як сторонах, і прикладена в точці їх перетину. Ця аксіома носить назву закону паралелограма сил.

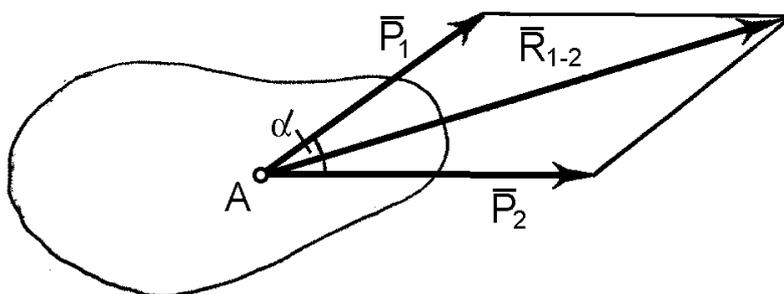


Рис. 1.4

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) в точці A прикладені дві сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 , які розташовані під кутом α . Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку A діагональ, яка і буде рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$ цих сил.

Таким чином, III аксіома статички дає можливість геометрично додати дві сили, що прикладені в одній точці

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2. \quad (1.1)$$

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто модуль рівнодійної, дорівнює

$$R_{1,2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладені в одній точці і розташовані під прямим кутом, а також коли вони співпадають за напрямком або спрямовані у протилежні сторони.

IV аксіома. Два взаємодіючих тіла діють одне на одного з рівними за модулем, але протилежними за напрямком силами. Ця аксіома носить назву закону дії та протидії.

Слід зауважити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, тому що вони прикладені до різних тіл.

V аксіома. Якщо гнучке (не тверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не зміниться, якщо тіло затвердіє. Ця аксіома має назву принципу затвердіння.

Основні типи в'язей та їх реакції

У теоретичній механіці тіла діляться на вільні та невільні.

Тіло вважається вільним, якщо воно має можливість необмежено рухатись у просторі в будь-якому напрямку.

Тіло, рух якого у просторі чимось обмежується, вважається невільним.

Тіла, або перешкоди які, обмежують рух даного тіла, називаються в'язями.

Механічна дія в'язі на дане тіло має назву сили реакції в'язі (в подальшому "реакція").

Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі. Кожна з цих в'язей має свою назву, графічне зображення і свої реакції.

1. Ідеально гладенька площина або опора (рис. 1.5, а). Реакція цієї в'язі \bar{R} напрямлена перпендикулярно до площини, або розташована вздовж нормалі. Гладенька площина накладає одну в'язь – неможливість рухатись по нормалі до поверхні, тому буде одна реакція, яка напрямлена проти напрямку втраченого переміщення за рахунок накладення в'язі.

Якщо поверхня буде сферичною (рис. 1.5, а), то реакція \bar{R}_A проходить крізь центри сфер O і O_1 по нормалі n (перпендикулярно до дотичної τ).

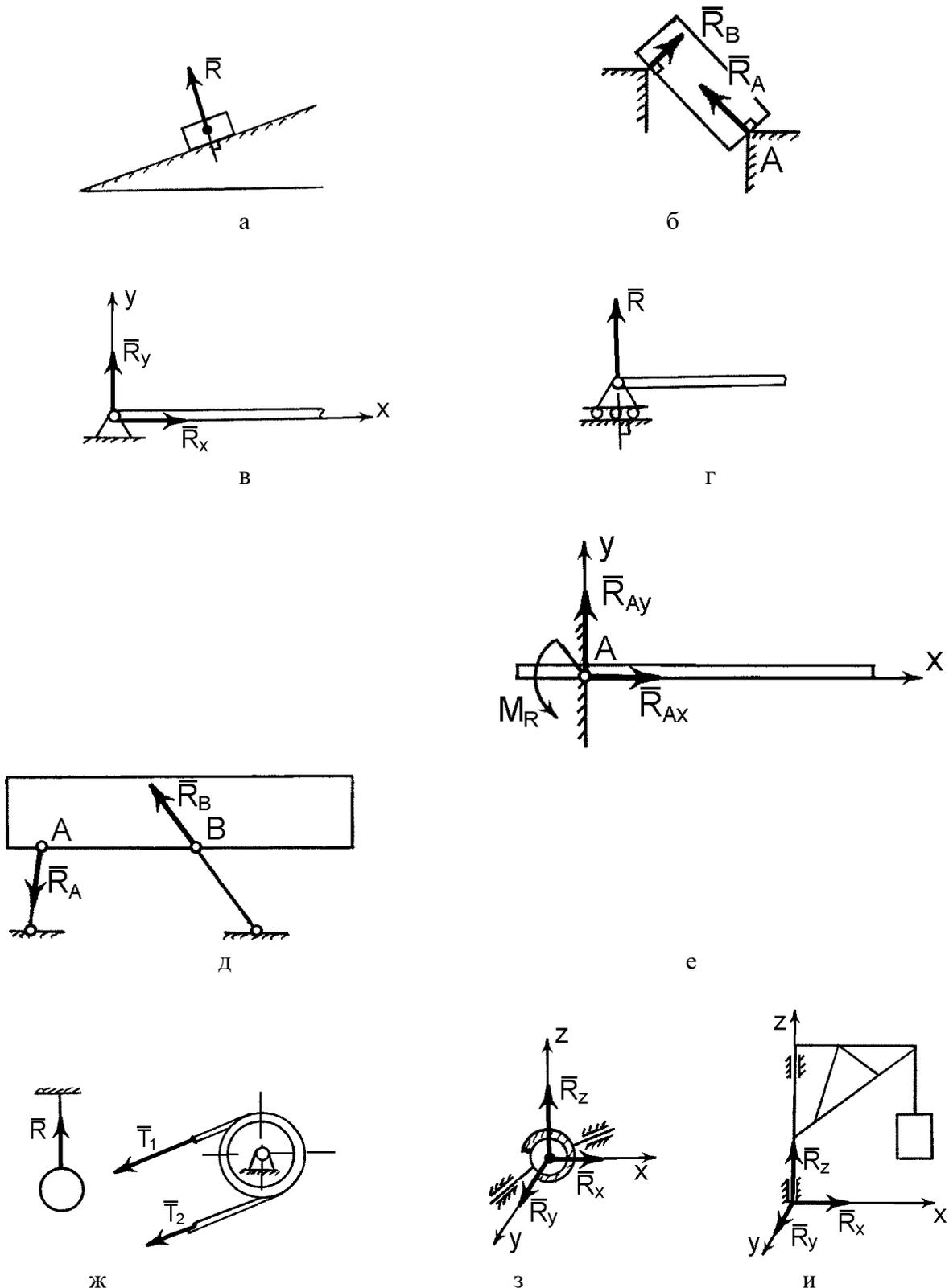


Рис. 1.5

2. Точкова опора (рис. 1.5, б). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакція в'язей \bar{R}_A і \bar{R}_B буде спрямована по перпендикуляру до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в даній точці.

3. Шарнірно – нерухома опора або нерухомий шарнір (рис. 1.5, в). Реакція шарнірно – нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і невідома за напрямком. При аналітичному розрахунку вектор реакції розкладається на дві складових вздовж осей координат R_x і R_y . З другого боку, ця опора накладає дві в'язі – неможливість вертикального і горизонтального рухів, тому і буде дві відповідні складові реакції у площині, яка перпендикулярна осі шарніра.

4. Шарнірно – рухома опора або каток (рис. 1.5, г). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до площини, по якій рухається каток.

5. Жорстке закріплення (рис. 1.5, д). Реакція цієї в'язі повинна бути представлена двома складовими у вигляді сил \bar{R}_{Ax} , і \bar{R}_{Ay} та реактивного моменту M_R . Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: неможливість вертикального і горизонтального рухів і повороту у площині.

6. Ідеальний стержень, тобто невагомий тонкий стержень, на кінцях якого встановлені циліндричні шарніри і який працює тільки на розтяг або на стиск (рис. 1.5, е). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована вздовж стержня і прикладена у центрі шарніра.

7. Гнучка нитка або в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами, тобто невагомими, нерозтяжними нитками: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 5.1, ж). Реакція цієї в'язі \bar{R} напрямлена вздовж нитки і прикладена у точці закріплення A . У пасовій передачі натяги в її гілках \bar{T}_1 і \bar{T}_2 також вважаються реакціями гнучких в'язей.

8. Сферичний шарнір або його частковий випадок – підп'ятник (рис. 1.5, з, и). Реакція цієї в'язі повинна бути зображеною трьома складовими у вигляді реакцій \bar{R}_x , \bar{R}_y , \bar{R}_z , напрямлених вздовж осей просторової декартової системи координат x y z , з початком у центрі сферичного шарніра або підп'ятника.

У зв'язку з введенням поняття в'язей вводиться VI та VII аксіоми статички, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей та аксіоми про накладання нових в'язей.

VI аксіома. Рівновага невідного матеріального тіла не зміниться, якщо відкинути в'язі, що накладені на нього, а замість них прикласти сили, які дорівнюють їх реакціям.

VII аксіома. Рівновага невідного матеріального тіла не зміниться, якщо на нього накласти нові в'язі.

Класифікація систем сил

По характеру розташування всі системи сил можна поділити на плоскі і просторові системи. Крім того, кожна з цих систем може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил.

– система збіжних сил характеризується тим, що напрямки векторів усіх сил перетинаються в одній точці.

– у системі паралельних сил вектори сил паралельні.

– у системах довільних сил вектори розташовані як завгодно на площині або у просторі.

Таким чином, можна констатувати, що маємо шість різних систем сил, під дією яких тіло може перебувати в стані рівноваги, або рухатись за певним законом.

Запитання для самоконтролю:

1. Що таке механічний рух? Що вивчає статика?
2. Що вивчає теоретична механіка? Задачі статички.
3. В чому полягає суть понять матеріальна точка та абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Які три характеристики має сила?
5. Що таке система сил?
6. Яка сила є рівнодійною системи сил?
7. Як формулюються аксіоми статички?
8. В якому випадку матеріальне тіло буде вільним?
9. Що таке в'язь і що таке реакція в'язі?
10. Які основні типи в'язей зустрічаються при розв'язуванні задач статички і які напрями мають їх реакції?

Лекція 2.

Тема: Плоска система збіжних сил

Якщо всі сили, які прикладені до тіла, розташовані в одній площині та лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву плоскої системи збіжних сил.

Покажемо на рис. 1.6 довільне тіло, до якого прикладена плоска системи збіжних сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$. При цьому лінії дії всіх сил перетинаються в точці A .

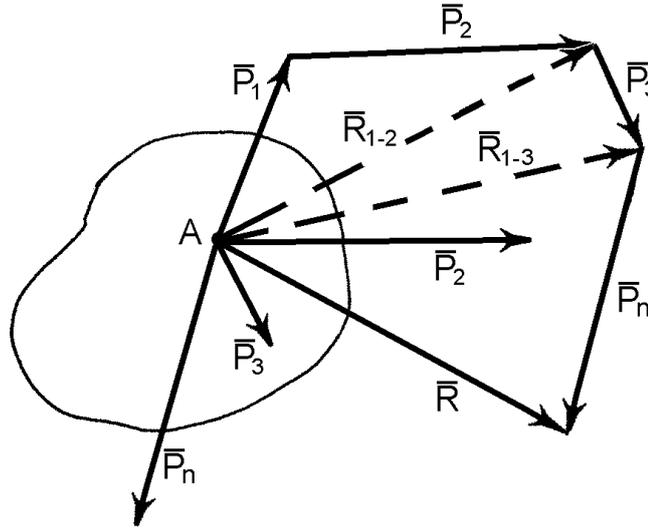


Рис. 1.6

Геометричний спосіб додавання збіжних сил

Додати систему сил, це означає визначити їх рівнодійну. Спробуємо знайти рівнодійну для плоскої системи збіжних сил, яка зображена на рис. 1.6. Візьмемо (умовно) дві перші сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 і на підставі III аксіоми статки знайдемо їх рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$, для чого на силах \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , як на сторонах, побудуємо паралелограм¹, діагональ якого, яка прикладена у точці A , і є їх рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$. Далі геометрично додамо дві наступні сили $\vec{R}_{1,2}$ і \vec{P}_3 , і вже на цих силах як на сторонах побудуємо свій паралелограм, діагональ якого буде рівнодійною $\vec{R}_{1,3}$. І так далі до останньої сили \vec{P}_n . Коли побудовано останній паралелограм і проведена остання діагональ, то вона і буде рівнодійною \vec{R} збіжної системи сил, яка показана на рис. 1.6.

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови паралелограмів, то можна побачити, що до кінця вектора сили \vec{P}_1 було приєднано вектор сили \vec{P}_2 (тобто в кінець вектора \vec{P}_1 перенесено паралельно вектор \vec{P}_2) і так далі до останньої сили \vec{P}_n .

Таким чином, геометричний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови силового многокутника. Він будується шляхом паралельного перенесення сил, коли початок наступної сили співпадає з кінцем попередньої сили. Тоді рівнодійна з'єднує початок першої сили з кінцем останньої сили. Це можна записати так:

$$\vec{R}_{1,n} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots + \vec{P}_n. \quad (1.3)$$

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил у геометричній формі

¹ Тут показаний не паралелограм, а його половина, тобто трикутник сил.

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила (або момент), то про рівновагу цього тіла мови не може бути. Таким чином, якщо розглядати плоску систему збіжних сил, яка зведена до рівнодійної, то тіло не може бути у рівновазі.

Для рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна всіх сил дорівнювала нулю.

Рівнодійна такої системи сил буде дорівнювати нулю, коли силовий багатокутник буде замкненим, тобто коли початок вектора першої сили буде співпадати з кінцем вектора останньої сили.

Теорема про рівновагу тіла, яке перебуває під дією трьох непаралельних сил

Сформулюємо вказану теорему.

Якщо тіло під дією трьох плоских непаралельних сил перебуває в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Уявимо тіло (рис. 1.7), до якого в точках A, B, C прикладені сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, вектори яких розташовані в одній площині. Розглянемо спочатку дві сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 . На підставі наслідку з I і II аксіом статики вказані сили завжди можна перенести по лінії їх дії в одну точку, наприклад, у точку O . Далі, якщо маємо в точці O дві прикладені сили, то на підставі III аксіомати статики їх можна замінити однією силою, тобто рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$. Побудуємо на рис. 1.7 на вказаних силах \vec{P}_1 та \vec{P}_2 паралелограм і покажемо рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$. Тепер тіло буде під дією тільки двох сил \vec{P}_3 та $\vec{R}_{1,2}$ і воно буде в рівновазі лише тоді, коли вектори цих сил розташовані на одній прямій, тобто на прямій CO . Тоді і вектор сили \vec{P}_3 перетинає точку O . Теорема доведена.

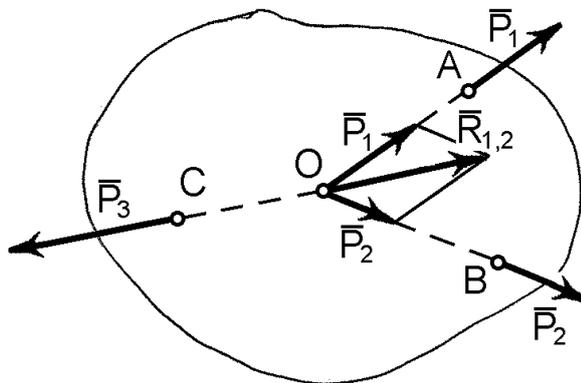


Рис. 1.7

Проекція сили на вісь та на площину

Уявимо силу \vec{P} , вектор якої довільно розташований у площині креслення (рис. 1.8).

Виберемо у цій площині вісь, наприклад, вісь x . Необхідно спроектувати вказану силу \vec{P} на дану вісь x .

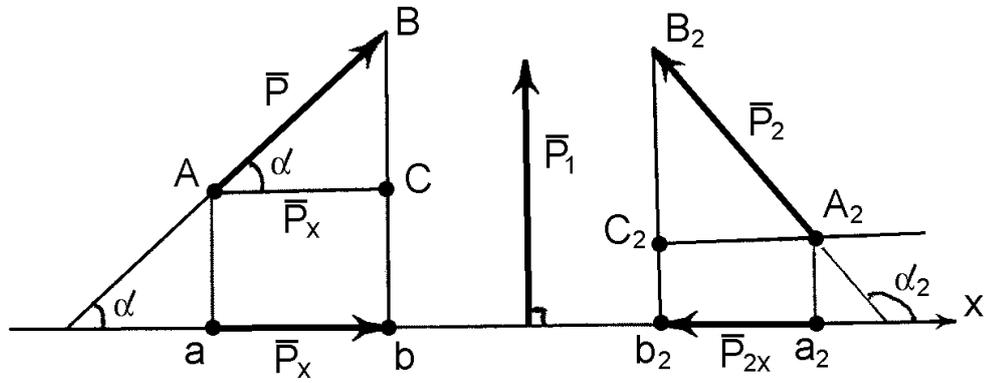


Рис. 1.8

Позначимо спочатку кінці вектора сили \vec{P} літерами A і B і опустимо з них на вісь x перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів з віссю x (позначимо їх відповідними малими буквами a і b) утворили на осі x напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили \vec{P} на вісь x . За величиною цей відрізок дорівнює добутку модуля сили $|\vec{P}|$ на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь. А саме:

$$P_x = P \cdot \cos \alpha. \quad (1.4)$$

За знаком проекція сили на вісь тоді буде додатня, коли кут α (кут перетину вектора сили або лінії дії сили з віссю) гострий. Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90° , то проекція сили \vec{P}_1 на вісь x дорівнюватиме нулю. Якщо кут α буде тупий, то проекція сили \vec{P}_2 на вісь x буде мати від'ємний знак.

Таким чином, *проекція сили на вісь – це напрямлений відрізок на осі, утворений між перпендикулярами, які опущені з кінців вектора сили на вісь, і який за величиною дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом вектора сили та віссю.*

Спроекуємо тепер вектор сили на площину і осі координат.

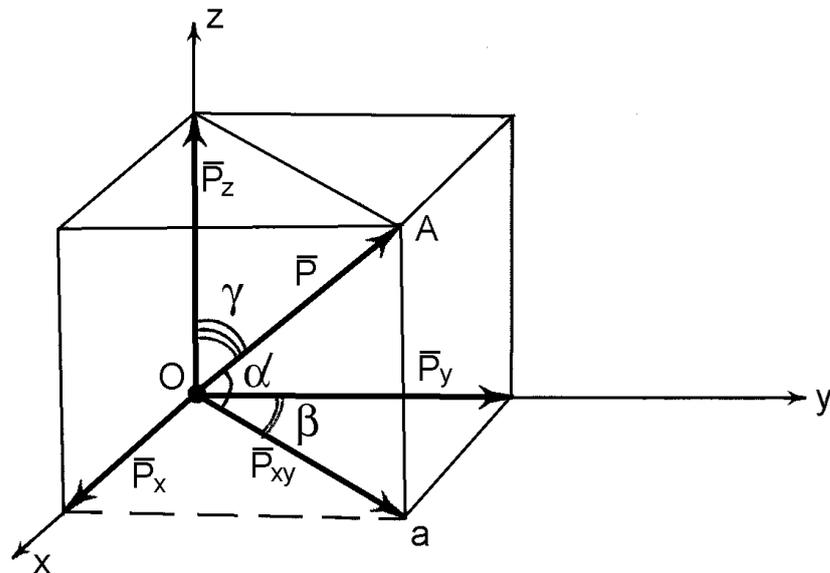


Рис. 1.9

Візьмемо силу \vec{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.9). Виберемо у просторі прямокутну декартову систему координат xuz , початок відліку якої (точку O) суміщений з точкою прикладання вектора сили \vec{P} . Спроекуємо вектор сили \vec{P} на площину xOy . Опустимо з точки A (кінець вектора сили) на вказану площину перпендикуляр, який

перетинає її в точці a . На площині xOy утворено вектор \overline{Oa} , який і є проекцією \overline{P}_{xy} сили на площину. За модулем ця проекція дорівнюватиме

$$P_{xy} = P \cos \alpha, \quad (1.5)$$

де α - кут між вектором сили \overline{P} та площиною xOy .

Якщо в площині xOy позначити кут β , то є можливість спроектувати силу \overline{P} на осі x та y , опускаючи з точки a на осі перпендикуляри і за відомим вже правилом отримати проекції вектора \overline{P}_{xy} на вказані осі:

$$P_x = P_{xy} \cdot \sin \beta = P \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (1.6)$$

$$P_y = P_{xy} \cdot \cos \beta = P \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (1.7)$$

У даному випадку крізь вісь z та вектор сили \overline{P} можна провести площину, тому є можливість спроектувати силу на цю вісь за відомим правилом. Ця проекція буде дорівнювати

$$P_z = P \cdot \cos \gamma, \quad (1.8)$$

де γ - кут між вектором сили \overline{P} та віссю z .

Визначення сили за її проекціями

Припустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну декартову систему координат xOy , задані дві проекції сили – P_x та P_y (рис. 1.10). Треба за даними проекціями обчислити модуль вектора самої сили \overline{P} , а також його напрямок.

На заданих проекціях, як на сторонах, будуємо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проекцій, і є шуканим вектором сили \overline{P} . Модуль сили \overline{P} можна визначити з наступного виразу:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}. \quad (1.9)$$

Кути між вектором сили \overline{P} та осями x та y можна визначити за допомогою напрямних косинусів

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(x, \overline{P}) = \frac{P_x}{P}, \\ \cos \beta &= \cos(y, \overline{P}) = \frac{P_y}{P}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

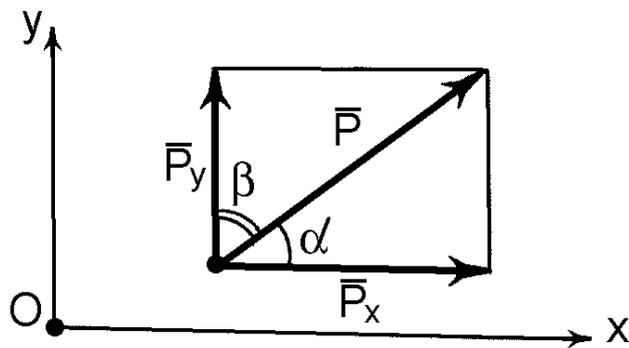


Рис. 1.10

Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь

Проекція вектора рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів складових сил на ту ж саму вісь.

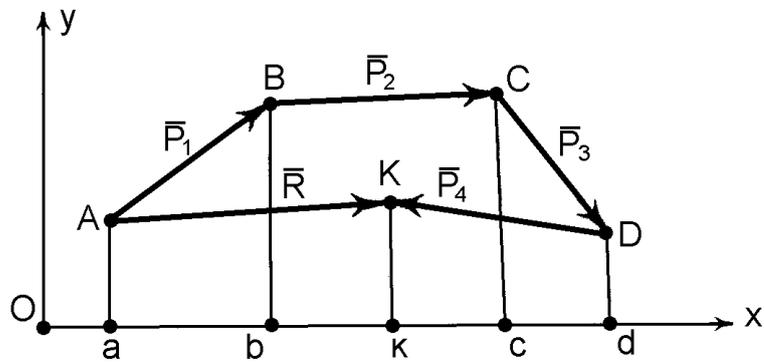


Рис. 1.11

Доведення. Маємо систему сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$, яка зведена до рівнодійної \bar{R} за допомогою силового многокутника (рис. 1.11). Введемо на площині прямокутну декартову систему координат xOy і спроектуємо на вісь x всі сили. Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами – A, B, C, D, K і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь x . Точки перетину перпендикулярів з віссю, які позначені відповідними малими літерами – a, b, c, d, k , утворили на осі напрямлені відрізки, які і є проєкціями всіх сил на вісь. Кожна проєкція, відповідно, дорівнює

$$|ab| = P_{1x}, \quad |bc| = P_{2x}, \quad |cd| = P_{3x}, \quad |-dk| = P_{4x}. \quad (1.11)$$

Додамо алгебраїчно всі проєкції і підрахуємо, чому ця сума дорівнює:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \quad (1.12)$$

Але відрізок ak і є проєкцією рівнодійної сили \bar{R} на вісь x . Поширюючи цю суму на n сил, можна записати:

$$R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx}. \quad (1.13)$$

Теорема доведена.

Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил

На підставі теореми про проєкцію рівнодійної сили на вісь, маємо:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}. \quad (1.14)$$

Аналогічно проєкція рівнодійної сили на вісь y буде дорівнювати

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}. \quad (1.15)$$

Модуль рівнодійної дорівнює

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.16)$$

Кути між вектором рівнодійної \bar{R} та осями координат x та y визначимо через косинуси кутів між відповідною віссю та рівнодійною:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{x}, \bar{R}) &= \frac{R_x}{R}, \\ \cos(\hat{y}, \bar{R}) &= \frac{R_y}{R}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил в аналітичній формі

Плоску систему збіжних сил можна замінити однією силою, яка носить назву рівнодійної.

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна дорівнювала нулю. А якщо рівнодійна дорівнює нулю, то і її проекції на осі x і y теж повинні дорівнювати нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним суммам проекцій складових сил, то остаточно матимемо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Для рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі координат дорівнювали нулю.

Запитання для самоконтролю:

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий багатокутник?
3. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній формі?
4. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
5. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
7. Як визначити силу за її проекціями?
8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
10. Які умови і які рівняння рівноваги системи збіжних сил?

Лекція 3.

Тема: Пара сил

Пара сил – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно напрямлених сил, розташованих в одній площині.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.16), до якого в точках A і B прикладені сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 . Причому $P_1 = P_2$ і $\vec{P}_1 \parallel \vec{P}_2$, тобто до тіла прикладена пара сил.

Площина, в якій розташовані сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил не має рівнодійної сили і характеризується моментом, що викликає обертання тіла під дією сил пари у площині дії пари.

Моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї з сил пари на плече пари. Плече пари – це відстань по перпендикуляру між лініями дії сил, які складають пару.

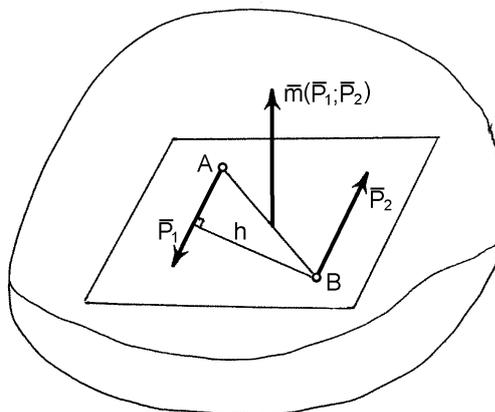


Рис. 1.16

Момент пари вважається додатним, якщо він намагається обертати тіло проти годинникової стрілки і, навпаки, – від'ємним, якщо намагається обертати тіло за годинниковою стрілкою.

Момент пари за модулем позначається $m(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$. Визначимо момент пари сил, яка зображена на рис. 1.16.

$$m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = P_1 h. \quad (1.33)$$

Момент пари сил можна уявити вектором. Цей вектор перпендикулярний до площини дії пари і напрямлений у той бік, з якого бачимо обертання тіла під дією пари проти годинникової стрілки. Момент $\bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ як вектор показаний на рис. 1.16. Проте момент пари сил як вектор не має фіксованої точки прикладення, оскільки він є вільним вектором..

Властивості пари сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил будуть еквівалентними, якщо при інших рівних умовах їх дії на тіло однакові. Оскільки пара сил характеризується моментом пари, то пари сил, що лежать в одній площині будуть еквівалентні, якщо вони мають однакові моменти (однакові за величиною та напрямком).

З цих положень випливають основні властивості пар сил:

- не змінюючи дії пари сил на тіло, пару сил можна обертати та переносити, як завгодно, в площині її дії;
- дія пари на тіло не змінюється, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площина дії залишалися незмінними;
- коли на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати. Якщо всі пари даної системи пар розташовані в одній площині, то момент результуючої пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (1.34)$$

Умови рівноваги тіла під дією системи пар, що розташовані в одній площині

Якщо на тіло діє система пар сил з моментами m_1, m_2, \dots, m_n і момент результуючої пари M , як вже відомо, буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів складових пар, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб момент результуючої пари дорівнював нулю. В такому разі і алгебраїчна сума моментів складових пар теж повинна дорівнювати нулю. Аналітично це буде мати такий вигляд

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (1.35)$$

Запитання для самоконтролю:

11. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладення?
12. Чому дорівнює рівнодійна двох протилежно спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладення?
13. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
14. Куди спрямований вектор моменту сили відносно точки?
15. Що таке пара сил, або просто пара?
16. Які властивості має пара сил у площині?
17. Як визначити момент пари? Куди спрямований момент пари як вектор?
18. Яка умова рівноваги системи пар у площині?
19. Які дві пари є еквівалентними?

Лекція 4.

Тема: Плоска система довільно розміщених сил

Паралельні сили. Додавання двох паралельних сил

Якщо лінії дії сил паралельні, то такі сили носять назву "паралельні сили".

Розглянемо питання про додавання сил, лінії дії яких паралельні. При цьому тут можуть бути два випадки: коли паралельні сили мають однаковий напрямок та коли паралельні сили протилежно напрямлені.

1. Розглянемо випадок, коли дві паралельні сили мають однаковий напрямок.

Маємо тіло, до якого прикладені дві паралельні сили: \vec{P}_1 - в точці A і \vec{P}_2 - в точці B (рис. 1.12). Напрямок сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 однаковий. Додати сили – це означає визначити їх рівнодійну.

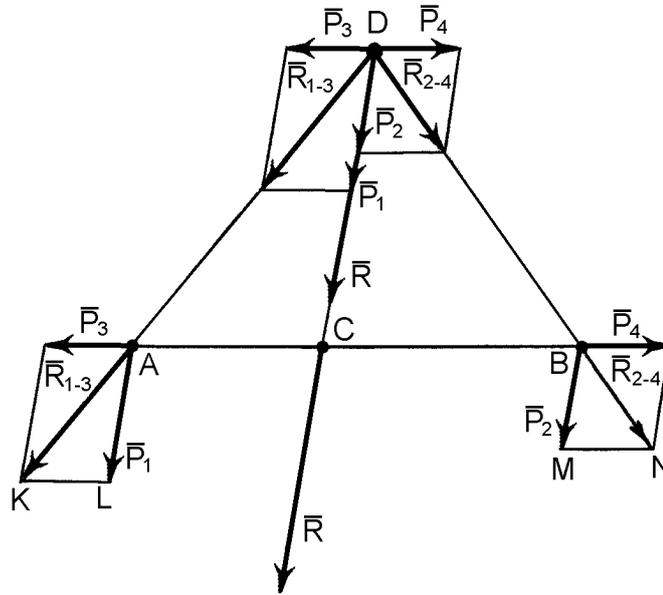


Рис. 1.12

Спочатку з'єднаємо точки A і B прямою. Далі прикладемо в точках A і B зрівноважену систему сил \vec{P}_3 і \vec{P}_4 . Причому $\vec{P}_3 = -\vec{P}_4$. Вектори сил \vec{P}_3 і \vec{P}_4 розміщені на прямій AB . Друга аксіома статички дозволяє це зробити. Внаслідок цього в точках A і B отримані по дві сили (в точці A – \vec{P}_1 і \vec{P}_3 , а в точці B – \vec{P}_2 і \vec{P}_4), які можна додати (завдяки третій аксіомі статички) і в кожній точці отримати рівнодійні сили – $\vec{R}_{1,3}$ і $\vec{R}_{2,4}$.

Перенесемо точки прикладання рівнодійних $\vec{R}_{1,3}$ і $\vec{R}_{2,4}$ вздовж ліній їх дії в точку перетину D . Далі розкладемо кожен рівнодійну на складові: $\vec{R}_{1,3}$ розкладається на \vec{P}_1 і \vec{P}_3 , а $\vec{R}_{2,4}$ на \vec{P}_2 і \vec{P}_4 . За вже відомою другою аксіомою статички прикладені в точці D сили \vec{P}_3 і \vec{P}_4 є зрівноваженою системою сил, яку можна відкинути. Залишаються прикладені в точці D дві сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , напрямок яких співпадає. Додамо їх і отримаємо рівнодійну \vec{R} , модуль якої буде дорівнювати

$$R = P_1 + P_2. \quad (1.19)$$

Перенесемо вектор рівнодійної сили \vec{R} з точки D в точку C , яка розташована на прямій AB . Розглянемо трикутники, які є на рис.1.12. Позначимо буквами кінці векторів сил \vec{P}_1 – L , \vec{P}_2 – M , $\vec{R}_{1,3}$ – K , $\vec{R}_{2,4}$ – N . Як бачимо з рис. 1.12, $\triangle ADC$ подібний $\triangle AKL$ і $\triangle BCD$ подібний $\triangle BMN$. Для подібних трикутників можемо скласти такі дві пропорції $\frac{AC}{KL} = \frac{DC}{AL}$ і $\frac{BC}{MN} = \frac{DC}{BM}$. Прирівняємо їх, оскільки в них є спільний член DC , отримаємо

$$DC = \frac{AC \cdot AL}{KL} = \frac{BC \cdot BM}{MN}.$$

Покажемо позначені літерами (AL, BM, KL, MN) в цьому виразі сили (P_1, P_2, P_3, P_4) . Будемо мати:

$$\frac{AC \cdot P_1}{P_3} = \frac{BC \cdot P_2}{P_4}.$$

Якщо скоротити множники P_3 і P_4 ($P_3 = P_4$) і перегрупувати, то отримаємо таке співвідношення

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.20)$$

Таким чином, на підставі отриманих виразів (1.19) і (1.21), остаточно можна сформулювати наступну теорему: *рівнодійна двох паралельних сил, які мають однаковий напрямок, є сумою цих сил, паралельна цим силам і спрямована в той же бік, точка її прикладання ділить внутрішнім чином відрізок, що з'єднує сили, на частини, які обернено пропорційні силам.*

2. Далі розглянемо випадок, коли є дві паралельні сили, але напрямки яких протилежні. Як в цьому разі визначити їх рівнодійну?

Уявимо, що до довільного тіла в точках A і B прикладені дві паралельні сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , які мають протилежний напрямок (рис. 1.13). Вважаємо, що модулі сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 не однакові. Далі буде зрозуміло, чому так приймається. Як і в попередньому випадку, з'єднаємо точки A і B прямою, приєднаємо в точках A і B зрівноважену систему сил $\bar{P}_3 = -\bar{P}_4$, вектори якої розташовані на прямій AB і мають протилежний напрямок. Додамо сили, які прикладені в точках A і B і отримаємо дві рівнодійні $\bar{R}_{1,3}$ і $\bar{R}_{2,4}$. Як бачимо, ці рівнодійні мають напрямок різний, але вони не паралельні і лінії їх дії перетинаються, в даному випадку попереду тіла в точці D . Як і в попередньому випадку, перенесемо рівнодійні $\bar{R}_{1,3}$ і $\bar{R}_{2,4}$ по лініях їх дії в точку D і розкладемо кожен на складові. Зрівноважену систему сил \bar{P}_3 і \bar{P}_4 відкидаємо і остаточно маємо в точці D дві сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , які лежать на одній прямій і мають протилежний напрямок. Ці сили можна геометрично додати отримавши їх рівнодійну. В даному випадку це буде різниця сил, модуль якої дорівнює

$$R = P_1 - P_2. \quad (1.21)$$

Напрямок цієї рівнодійної – в бік більшої сили, тобто, в бік сили P_1 .

Перенесемо рівнодійну R з точки D вздовж лінії її дії в точку C , яка розташована на прямій AB . В даному випадку точка C розміщена за межами відрізка AB , тобто за точкою A , де була прикладена більша сила \bar{P}_1 .

Знайдемо місце розташування точки C . Як і в попередньому випадку, розглянемо трикутники. Позначимо літерами кінці векторів сил: $\bar{P}_1 - L$, $\bar{P}_2 - M$, $\bar{R}_{1,3} - K$, $\bar{R}_{2,4} - N$. Як бачимо з рис. 1.13, $\triangle BCD$ є подібним $\triangle DMN$, а $\triangle ACD$ - подібний $\triangle DLK$. Для подібних трикутників складемо такі дві пропорції

$$\frac{BC}{MN} = \frac{CD}{DM},$$

і

$$\frac{AC}{KL} = \frac{CD}{DL}.$$

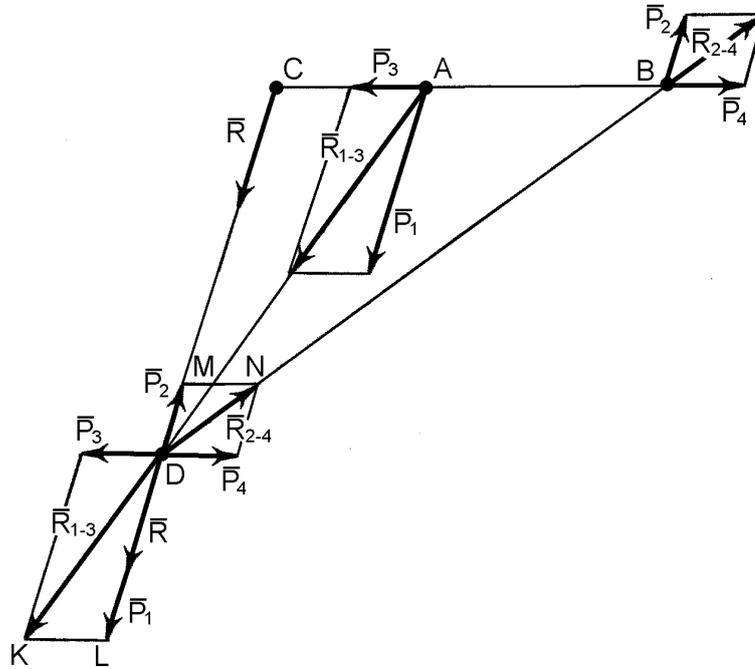


Рис. 1.13

Оскільки кожна пропорція містить множник CD , то прирівняємо їх,
 $CD = \frac{DM \cdot BC}{MN} = \frac{DL \cdot AC}{KL}$. Покажемо, як і в попередньому випадку, сили, які в цьому виразі

позначені літерами. Матимемо $\frac{P_2 \cdot BC}{P_4} = \frac{P_1 \cdot AC}{P_3}$. Скоротимо далі дану рівність на P_4, P_3
 $(P_3 = P_4)$, отримаємо таке співвідношення

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.22)$$

Таким чином, на підставі отриманих виразів (1.21) і (1.22), остаточно можна записати так: *Рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в різні боки, дорівнює різниці цих сил і напрямлена у бік більшої сили; точка прикладання рівнодійної сили ділить зовнішнім чином відстань між точками прикладання складових сил на відрізки, які обернено пропорційні складовим силам.*

Момент сили відносно центра (точки).

Алгебраїчна величина моменту

Обертальний ефект сили характеризується її моментом відносно центра (точки), а також і відносно осі (останній буде далі).

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.14), яке може повертатися навколо точки O (точніше навколо осі, яка перпендикулярна площині рисунка і проходить через точку O). Прикладемо в інших точках тіла A, B, C сили $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ і визначимо спочатку, чи зможуть вони повертати тіло навколо точки O .

Як бачимо з рисунка, сила P_1 , яка прикладена у точці A , може повернути тіло навколо точки O проти ходу стрілки годинника. Сила \bar{P}_2 - за ходом стрілки годинника. Проте сила \bar{P}_3 не може повертати тіло навколо точки O , оскільки лінія дії сили \bar{P}_3 перетинає дану точку. Таким чином сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 створюють обертальний ефект (момент) відносно точки O , а сила \bar{P}_3 - ні.

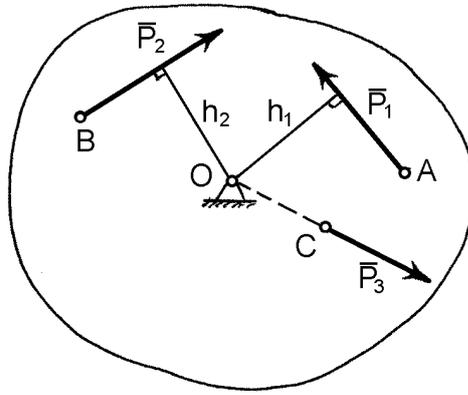


Рис. 1.14

Моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток сили на плече. Плече сили відносно центра – це найкоротша відстань (перпендикуляр) між даним центром і лінією дії сили.

Момент вважається додатнім, якщо сила намагається повернути тіло відносно даної точки проти годинникової стрілки і від'ємним, якщо - за годинниковою стрілкою.

Момент сили \bar{P} відносно точки O позначається як $m_o(\bar{P})$.

Покажемо на рис. 1.14 плечі сил, які створюють моменти відносно точки O , і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил

$$m_o(\bar{P}_1) = P_1 h_1, \quad (1.23)$$

$$m_o(\bar{P}_2) = -P_2 h_2, \quad (1.24)$$

$$m_o(\bar{P}_3) = 0. \quad (1.25)$$

Момент сили як вектор

Розглянемо силу \bar{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.15). Визначимо момент сили \bar{P} відносно довільної точки O , для чого опустимо з точки O до вектора сили \bar{P} перпендикуляр, це буде плече h . Тоді алгебраїчна величина моменту сили \bar{P} відносно точки O дорівнюватиме

$$m_o(P) = Ph. \quad (1.26)$$

Позначимо літерами A і B кінці вектора сили \bar{P} і з'єднаємо їх з точкою O . Основою трикутника AOB є вектор сили \bar{P} , а вершина розміщена у точці O . Плече h є висотою трикутника AOB . Тоді момент сили \bar{P} відносно точки O є подвійною площею трикутника AOB , тобто

$$m_o(\bar{P}) = 2S_{\Delta AOB}. \quad (1.27)$$

Далі проведемо через точку O просторову декартову систему координат $Oxyz$ з ортами \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} . Вважаємо, що відстань OA є радіус-вектором \bar{r} точки A прикладання вектора сили \bar{P} .

Оскільки момент сили \bar{P} відносно точки O , як ми визначили, є подвійною площею трикутника, то побудуємо паралелограм $OABD$. Фактично вектор сили \bar{P} ми перенесли паралельно самому собі у точку O . Тепер можна бачити, що в точці O прикладені два вектори \bar{r} і \bar{P} , на яких і побудовано паралелограм. А це, як відомо, є векторний добуток двох векторів $\bar{r} \times \bar{P}$. Таким чином, момент сили відносно точки $\bar{m}_o(\bar{P})$ є результуючим вектором добутку двох векторів \bar{r} і \bar{P} , тобто $m_o(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}$.

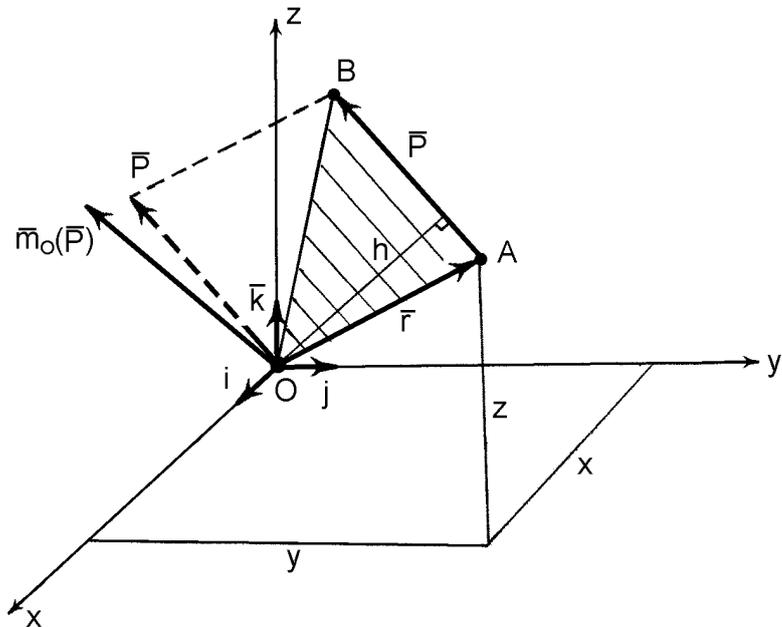


Рис. 1.15

Остаточно сформулюємо визначення: *момент сили відносно центра O як вектор проходить крізь точку O, перпендикулярно площі трикутника OAB, і спрямований у той бік, з якого можна бачити обертання тіла під дією сили \bar{P} відносно точки O проти годинникової стрілки. За модулем він дорівнює подвійній площі трикутника, який утворює вектор сили \bar{P} і точка O.*

Таким чином, момент сили відносно точки як вектор повністю визначає обертальний ефект сили, яка прикладена до тіла: лінія його дії визначає площину обертання, його напрямок визначає напрямок обертання, а довжина у певному масштабі визначає модуль моменту.

Визначимо аналітично значення моменту сили відносно точки.

У прийнятій системі координат вектори \bar{r} і \bar{P} можна виразити через відповідні проєкції на осі. А саме

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (1.28)$$

$$\bar{P} = P_x\bar{i} + P_y\bar{j} + P_z\bar{k}, \quad (1.29)$$

де x, y, z - проєкції радіус-вектора \bar{r} на осі координат; P_x, P_y, P_z - проєкції вектора сили \bar{P} на відповідні осі; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - відповідні орти осей координат.

Оскільки

$$m_o(P) = \bar{r} \times \bar{P}, \quad (1.30)$$

то, як відомо з векторної алгебри, векторний добуток можна записати у вигляді визначника третього порядку через проєкції векторів на осі координат та орти, а саме:

$$m_o(P) = \bar{r} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}.$$

Розкриємо даний визначник за елементами першого рядка, отримаємо

$$\bar{m}_o(\bar{P}) = (yP_z - zP_y)\bar{i} + (zP_x - xP_z)\bar{j} + (xP_y - yP_x)\bar{k}. \quad (1.31)$$

Коефіцієнти при одиничних векторах у виразі (1.31) є проєкціями моменту сили відносно точки як вектор на осі координат x, y, z . А саме

$$\left. \begin{aligned} [m_o(\bar{P})]_x &= yP_z - zP_y, \\ [m_o(\bar{P})]_y &= zP_x - xP_z, \\ [m_o(\bar{P})]_z &= xP_y - yP_x. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Система сил, довільно розташованих у площині.

Теорема про паралельне перенесення сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла довільно розташовані в одній площині, то така система сил зветься "плоскою системою довільних сил".

Розглянемо теорему про паралельне перенесення сили, що прикладена до тіла, яку можна вважати лемою. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила \bar{P}_1 з лінією дії MN (рис. 1.17, а). Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій MN . Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему сил $\bar{P}_2 = -\bar{P}_3$, модулі усіх трьох сил виберемо однаковими, тобто

$$P_1 = P_2 = P_3. \quad (1.36)$$

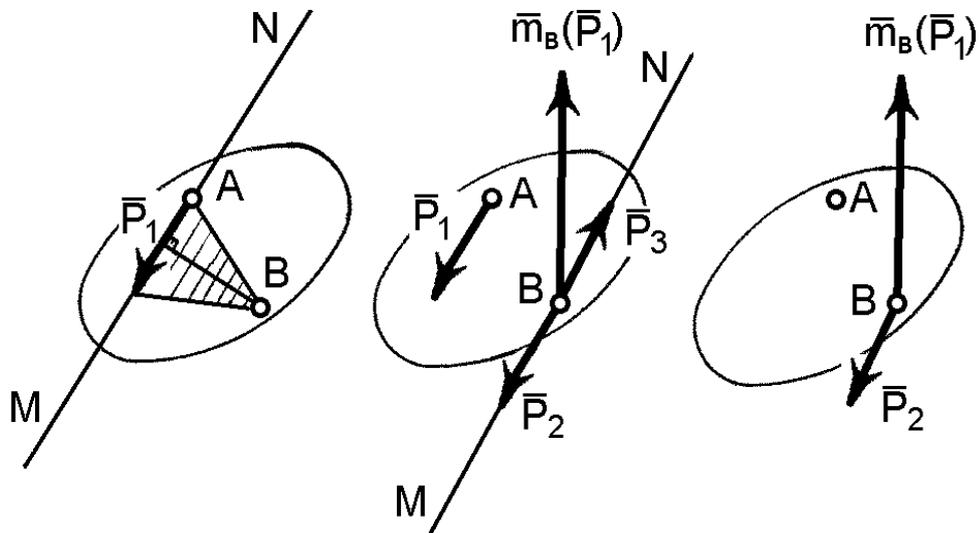


Рис. 1.17

Тепер, як бачимо з рис. 1.17, б, сили \bar{P}_1 і \bar{P}_3 можна об'єднати у пару сил ($P_1 = P_3, \bar{P}_1 // \bar{P}_3$) і її можна замінити моментом $\bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_3)$ пари. Модуль моменту цієї пари буде дорівнювати моменту даної сили \bar{P}_1 відносно точки переносу B :

$$m(\bar{P}_1, \bar{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\bar{P}_1). \quad (1.37)$$

Отже, остаточно маємо силу \bar{P}_1 , яка перенесена паралельно в точку B (сила $\bar{P}_2, \bar{P}_2 = \bar{P}_1$) і, так звану, "приєднану" пару (\bar{P}_1, \bar{P}_3), момент якої дорівнює моменту сили, що переноситься, відносно точки переносу (рис. 1.17, в).

Таким чином, теорему можна сформулювати так: *при паралельному переносі сили в іншу точку рівновага тіла не зміниться, якщо додати "приєднану", або компенсуючу пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно точки переносу.*

Зведення плоскої системи довільних сил до даного центра

Уявимо довільне тіло, що знаходиться під дією системи сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, лінії дії яких розміщені у площині рисунку і розташовані довільно (рис. 1.18, а). Виберемо на тілі точку O як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно самим собі (якщо лінія дії сили перетинає точку O , то ця сила просто переноситься по лінії дії у центр зведення).

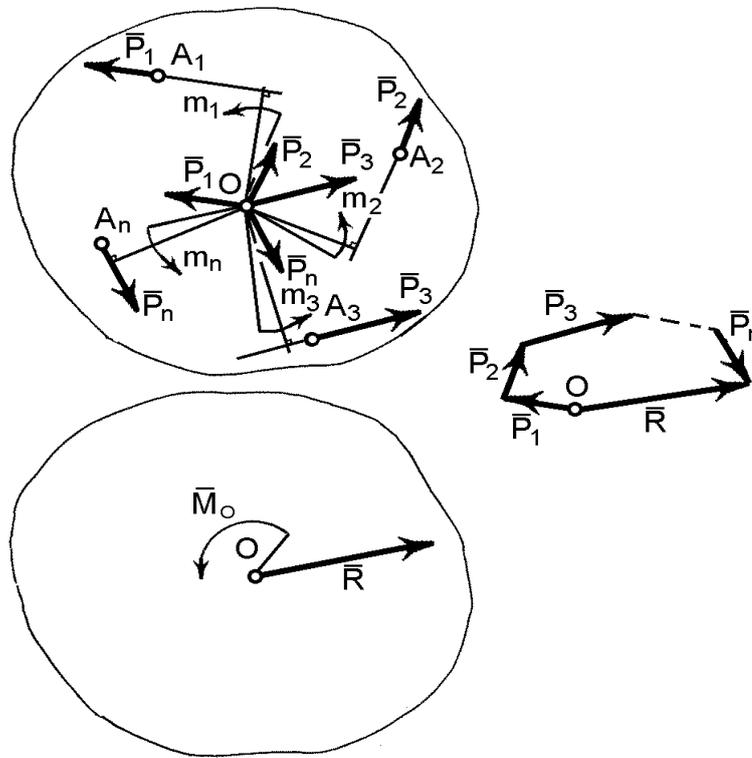


Рис. 1.18

Розпочнемо з сили \bar{P}_1 . Сила переноситься паралельно самій собі у точку O , але при цьому до тіла додається момент приєднаної пари сил, який дорівнює моменту сили \bar{P}_1 відносно точки O :

$$m_1 = m_o(\bar{P}_1) = P_1 h_1. \quad (1.38)$$

Тепер маємо силу \bar{P}_1 , яка прикладена до тіла у центрі зведення O , та приєднану до тіла пару сил з моментом m_1 .

Подібно вчинимо і з рештою сил $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення O і при цьому до тіла додаються приєднані пари сил

$$\begin{aligned} m_2 &= P_2 h_2 = m_o(\bar{P}_2), \\ m_3 &= P_3 h_3 = m_o(\bar{P}_3), \\ m_n &= P_n h_n = m_o(\bar{P}_n). \end{aligned} \quad (1.39)$$

В результаті таких операцій до тіла у точці O прикладена плоска система збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і на тіло діє система пар сил з моментами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, величини яких визначаються залежністю (1.39).

Систему збіжних сил у точці O можна замінити однією силою \bar{R} , головним вектором плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно геометрично додати систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення O , тобто побудувати силовий багатокутник: (рис. 1.18, б)

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.40)$$

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M_o = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (1.41)$$

Таким чином, плоска система довільних сил може бути зведена до однієї сили \bar{R} – головного вектора системи, і однієї пари з моментом M_o – головного моменту системи (рис. 1.18, в).

Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно центра зведення.

Головний вектор \bar{R} і головний момент M (відносно будь-якого центру зведення) плоскої системи довільних сил мають деякі властивості. Так, величина головного вектора \bar{R} не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту M залежить від зміни центра зведення. А якщо головний вектор \bar{R} дорівнює нулю, то головний момент M також буде незалежним від вибору центра зведення. Якщо ж головний момент M дорівнює нулю, то головний вектор \bar{R} буде рівнодієюною плоскої системи сил.

Визначимо аналітично головний вектор та головний момент плоскої системи довільних сил. Для головного вектора \bar{R} спочатку визначимо його проекції на осі плоскої декартової системи координат (відповідно до теореми про проекцію рівнодієюної сили на вісь). А саме

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= \sum_{k=1}^n P_{ky}, \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

де P_{kx}, P_{ky} - проекції складових сил системи на відповідні осі координат.

Модуль головного вектора дорівнює

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.43)$$

Головний момент M визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення O , а саме

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.44)$$

Частинні випадки зведення плоскої системи довільних сил до даного центра

Ще раз виділимо окремі випадки, які можуть бути при зведенні плоскої системи довільних сил до даного центра. А саме:

1. Головний вектор $\bar{R} = 0$, а головний момент $M \neq 0$. У цьому випадку величина головного моменту M не залежить від вибору центра зведення;
2. Головний момент $M = 0$, а головний вектор $\bar{R} \neq 0$. У даному випадку головний вектор \bar{R} є рівнодієюною силою;

Теорема Варіньона про момент рівнодієюної сили

Момент рівнодієюної сили відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра.

Доведення. Маємо довільне тіло, до якого в точці A прикладена система збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, яка зведена до рівнодієюної сили \bar{R} (рис. 1.19). Виберемо довільну точку O (центр) і визначимо відносно неї моменти всіх сил. Починаємо з сили \bar{P}_1 . Знайдемо її момент відносно точки O . Спочатку з'єднаємо прямими лініями початок і кінець вектора сили \bar{P}_1 з точкою O . Проведемо крізь точку O пряму, яка перпендикулярна прямій OA , і будемо вважати цю пряму віссю x (тобто задамо її напрямком). Момент сили \bar{P}_1 відносно точки O є подвійною площею трикутника OAB , тобто

$$m_o(\bar{P}_1) = 2S\Delta OAB. \quad (1.45)$$

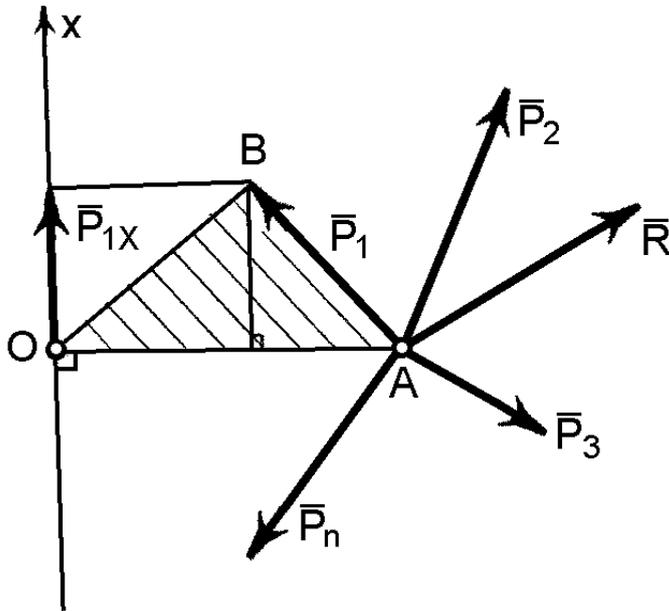


Рис. 1.19

Визначимо площу цього трикутника. Як відомо, це є половина добутку основи (у нашому випадку це сторона OA) на висоту трикутника h . А висота у даному випадку дорівнює проекції вектора сили \bar{P}_1 на вісь x – P_{1x} . Таким чином, момент сили \bar{P}_1 відносно точки O дорівнює

$$m_o(\bar{P}_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot P_{1x} = OA \cdot P_{1x}. \quad (1.46)$$

Аналогічно обчислимо моменти інших сил системи

$$\begin{aligned} m_o(\bar{P}_2) &= OA \cdot P_{2x}, \\ m_o(\bar{P}_3) &= OA \cdot P_{3x}, \\ &\dots\dots\dots \\ m_o(\bar{P}_n) &= OA \cdot P_{nx}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Тепер перейдемо до рівнодійної \bar{R} системи сил і таким же чином визначимо її момент відносно точки O . Він буде дорівнювати

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x, \quad (1.48)$$

де R_x - проекція рівнодійної сили \bar{R} на вісь x .

Згідно теореми про проекцію рівнодійної сили на вісь, яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю вісь, можна записати

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x = OA (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx}). \quad (1.49)$$

Розкриваючи дужки, матимемо

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot P_{1x} + OA \cdot P_{2x} + OA \cdot P_{3x} + \dots + OA \cdot P_{nx}. \quad (1.50)$$

Права частина даного виразу містить моменти складових сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ відносно точки O . Остаточно отримаємо

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.51)$$

Таким чином, з останнього виразу видно, що момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра.

Теорема доведена.

під дією плоскої системи довільних сил

Будь-яка плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектора системи, і однієї пари – головного моменту системи.

Тоді для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний її момент M дорівнювали нулю.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= 0, \\ M &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

або через проекції головного вектора:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= 0, \\ R_y &= 0, \\ M &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

а отже

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи довільних сил, *необхідно і достатньо*, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Існують дві інші еквівалентні системи умов рівноваги плоскої системи довільних сил. А саме:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

На дану систему умов рівноваги накладається обмеження: пряма, яка може з'єднати точки A і B , відносно яких визначаються суми моментів усіх сил, не повинна бути перпендикулярною осі (у даному випадку осі x), на яку проектуються сили.

Третя система умов рівноваги має такий вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_C(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

На цю систему умов рівноваги накладається таке обмеження: точки A , B і C , відносно яких визначаються суми моментів усіх сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Зосереджені сили та розподілені навантаження

Ми розглядали сили, які були представлені у вигляді вектора, прикладеного до точки. Проте у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Такими силовими факторами є сили тиску рідини або газу на поверхню твердих тіл, сили тяжіння, як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому у теоретичній механіці вводиться поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі та об'ємні.

Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла. Об'ємні сили діють на кожний елемент об'єму тіла, яке розглядається. Прикладом таких сил є сила тяжіння.

У теоретичній механіці розглядається дія на тіло тільки зосереджених сил, які прикладені до абсолютно твердих тіл. А тому розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодієюю, тобто зосередженою силою. Введемо декілька загальних положень.

Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю \bar{q} , тобто величиною сили, яка припадає на одиницю об'єму тіла (у випадку об'ємних сил), на одиницю площі (у випадку поверхневих сил) та на одиницю довжини (якщо поверхню, на яку діє навантаження, можна вважати лінією, тобто шириною поверхні можна знехтувати). В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах воно зображується у вигляді епюри, тобто графіка інтенсивності навантаження, яке прикладене до лінійного контуру тіла.

У загальному випадку розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає даний закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (рис. 1.20). Напрямок дії навантаження показується стрілками.

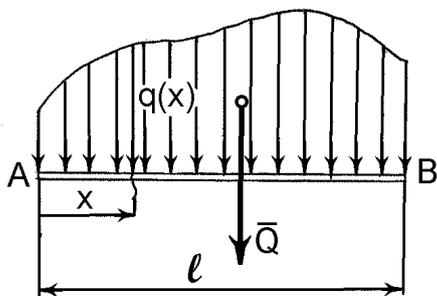


Рис. 1.20

Спочатку будемо розглядати тільки рівномірно розподілене навантаження та навантаження, яке розподілене за лінійним законом. Замінюємо розподілене навантаження зосередженою силою.

Розглянемо ці два випадки:

– рівномірно розподілене навантаження (або навантаження, яке розподілене за законом прямокутника) показується на схемах у вигляді прямокутника, розміри якого такі: висота – це інтенсивність навантаження \bar{q} , довжина – це довжина l ділянки тіла, на якій діє навантаження. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 1.21). Для того, щоб замінити це навантаження рівнодієюю силою \bar{Q} , треба визначити її. У даному випадку

$$Q = q \cdot l, \quad (1.57)$$

де q - інтенсивність навантаження, $\left[\frac{H}{M} \right]$; l - довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, $[M]$.

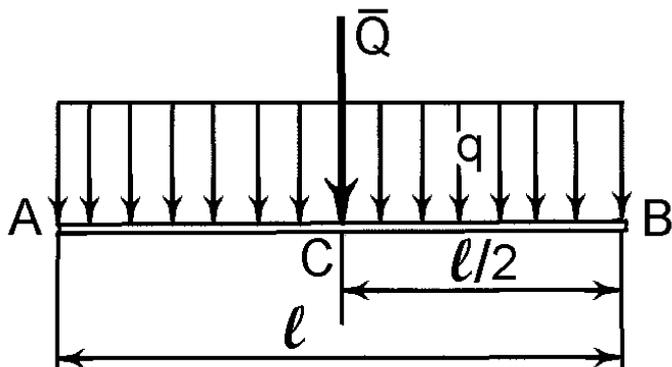


Рис. 1.21

Точка C прикладання рівнодійної сили \bar{Q} розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє навантаження. Тобто $AC = \frac{l}{2}$, а напрямок співпадає з напрямком розподіленого навантаження.

– навантаження розподілене за лінійним законом (тобто за законом трикутника). У цьому випадку (рис. 1.22) інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{max} . Рівнодійна сила \bar{Q} від цього навантаження за величиною дорівнює

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot l. \quad (1.58)$$

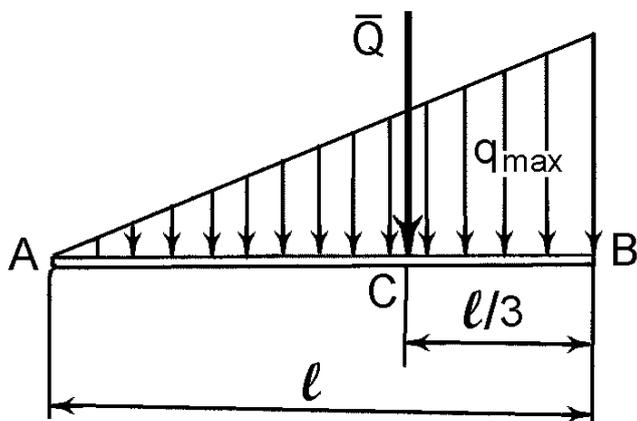


Рис. 1.22

Точка C прикладання рівнодійної \bar{Q} розташована на відстані $AC = \frac{2}{3} \cdot l$ або $BC = \frac{1}{3} l$,

а напрямок співпадає з напрямком навантаження.

Плоска система паралельних сил

Коли лінії дії усіх сил паралельні, то завжди у площині можна так розташувати осі координат, що одна з них буде обов'язково паралельною заданим силам, а друга – перпендикулярною. А тому, щоб тіло під дією плоскої системи паралельних сил перебувало у рівновазі, необхідно прирівняти до нуля алгебраїчну суму проєкцій усіх сил на паралельну вісь і алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно довільної точки. У даному випадку система рівнянь (1.54) спрощується і буде мати такий вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Для рівноваги тіла, що знаходиться під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на вісь, яка паралельна силам², і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки A площини дорівнювали нулю.

Іноді для системи паралельних сил на площині можна використовувати і такі умови рівноваги

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Для рівноваги тіла, що знаходиться під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок площини дорівнювали нулю.

Проте для цих умов існує обмеження: лінія AB , якою можна з'єднати точки, не повинна бути паралельною силам.

Дані умови найбільш придатні при розрахунках двохопорних балок. Використовуючи ці умови, складають алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно точок A і B , у яких встановлені опори балки.

Розглянемо приклади задач на рівновагу тіла під дією плоскої системи довільних сил.

Рівновага системи тіл

Системою тіл називається сукупність декількох тіл, які або спираються одне на одне, або з'єднані шарнірами, що дають можливість відносного руху тіл.

При розв'язанні задач на систему тіл розрізняють сили зовнішні та внутрішні.

Зовнішні сили – це сили взаємодії тіл даної системи з іншими тілами, які не входять до складу системи.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між окремими тілами, які входять до складу даної системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія.

Статично означені та статично неозначені системи сил

Система сил є статично означеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь рівноваги, яка не менша, ніж число невідомих.

Система сил є статично неозначеною, якщо число рівнянь рівноваги менше, ніж число невідомих.

У теоретичній механіці розглядаються тільки статично означені системи сил.

Методика розв'язання задач на рівновагу механічної системи тіл

Рівновагу механічної системи тіл можна розглядати в цілому під дією тільки зовнішніх сил. Але може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншим, ніж кількість невідомих. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її обов'язково по в'язях. Причому необхідно враховувати, що внутрішні сили входять попарно, як дія та протидія.

Розглянемо приклад розв'язування задач на рівновагу системи тіл.

Приклад 3.

² На яку завгодно вісь, крім перпендикулярної, але простіше проектувати на паралельну силам вісь, що тут і приймається.

На трьохшарнірну арку A, B, C (рис. 1.25) діє вертикальна сила $P = 10 \text{ kH}$. Вага кожної частини балки $Q_1 = Q_2 = 6 \text{ kH}$. Визначити реакції шарнірів A, B, C арки, розміри якої дані на рисунку.

Розв'язання.

Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох піварок I та II , які з'єднані шарніром у точці C . Складемо розрахунково – силову схему, де покажемо задані активні сили $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}$ та реакції в'язей: у точках A і B (нерухомі шарнірні опори) – \bar{X}_A, \bar{Y}_A і \bar{X}_B, \bar{Y}_B та у точці C (шарнірне з'єднання) – \bar{X}_C, \bar{X}'_C та \bar{Y}_C, \bar{Y}'_C . Ці невідомі реакції у точці C є внутрішніми силами системи тіл, а тому $X_C = X'_C$ і $Y_C = Y'_C$.

Покажемо осі прямокутної декартової системи координат xAy .

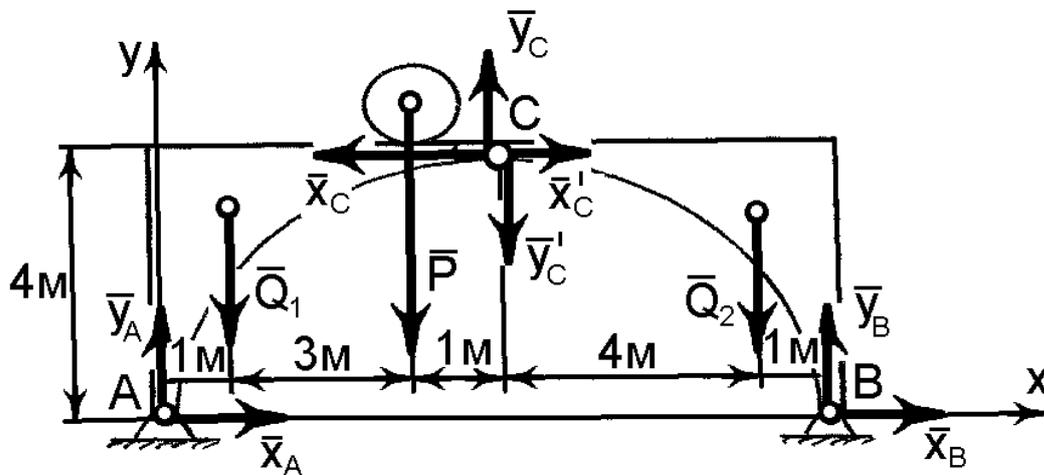


Рис. 1.25

Умовно розділяємо систему тіл на два окремих тіла, причому розділення відбувається у шарнірі C , і реакції в ньому діляться між тілами, як рівні. Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (1.54).

Для першого тіла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_A - X_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Для другого тіла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; X_B + X'_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; Y_B - Y'_C - Q_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0; Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих: $X_A, X_B, X_C, Y_A, Y_B, Y_C$.

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо Y'_C . Перепишемо це рівняння наступним чином:

$$5Y'_C = 4X'_C - Q_2,$$

звідки знаходимо реакцію Y'_C :

$$Y'_C = \frac{4X'_C - Q_2}{5};$$

Оскільки чисельно $Y'_C = Y_C$, а $X_C = X'_C$, то підставимо значення цих реакцій у третє рівняння першої системи, отримуємо

$$5 \frac{(4X_C - Q_2)}{5} + 4X_C = Q_1 + 4P,$$

або

$$8X_C = Q_1 + Q_2 + 4P,$$

звідки

$$X_C = \frac{6 + 6 + 40}{8} = \frac{52}{8} = 6,5 \text{ kH}.$$

Тепер є можливість визначити невідому реакцію Y'_C . Підставимо значення X_C у третє рівняння другої системи, будемо мати

$$Y'_C = \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4 \cdot 6,5 - 6,0}{5} = 4,0 \text{ kH}.$$

З першого рівняння першої системи маємо $X_A = X_C = 6,5 \text{ kH}$. А з першого рівняння другої системи маємо $X_B = -X'_C = -6,5 \text{ kH}$. Напрямок цієї реакції повинен бути протилежним показаному на силовій схемі. З другого рівняння першої системи одержуємо

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6,0 + 10,0 - 4,0 = 12,0 \text{ kH}.$$

З другого рівняння другої системи обчислимо останню невідому реакцію Y_B . Вона буде дорівнювати $Y_B = Y'_C + Q_2 = 4,0 + 6,0 = 10,0 \text{ kH}$.

Таким чином визначені всі шукані величини.

Відповідь:

$$X_A = 6,5 \text{ kH}; \quad Y_A = 12,0 \text{ kH}; \quad X_B = -6,5 \text{ kH}; \quad Y_B = 10,0 \text{ kH};$$

$$X_C = 6,5 \text{ kH}; \quad Y_C = 4,0 \text{ kH}.$$

Запитання для самоконтролю:

20. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
21. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
22. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
23. В якому випадку плоска система довільних сил зводиться до однієї пари?
24. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
25. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
26. Сформулюйте теорему Варіньона про момент рівнодійної сили відносно центра.
27. Які умови рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи довільних сил?
28. Три форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил.
29. Яке обмеження накладається на третю систему умов рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи довільних сил?
30. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
31. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
32. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
33. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?
34. Що таке статично означені і статично неозначені задачі?
35. Які особливості має метод розв'язування задач на рівновагу системи тіл?

Лекція 5.

Тема: Центр ваги

Центр паралельних сил

Припустимо, що до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних і однаково спрямованих сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ (рис. 1.56). Додамо геометрично сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , тобто визначимо їх рівнодійну $\bar{R}_{1,2}$. Вона буде дорівнювати

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2. \quad (1.139)$$

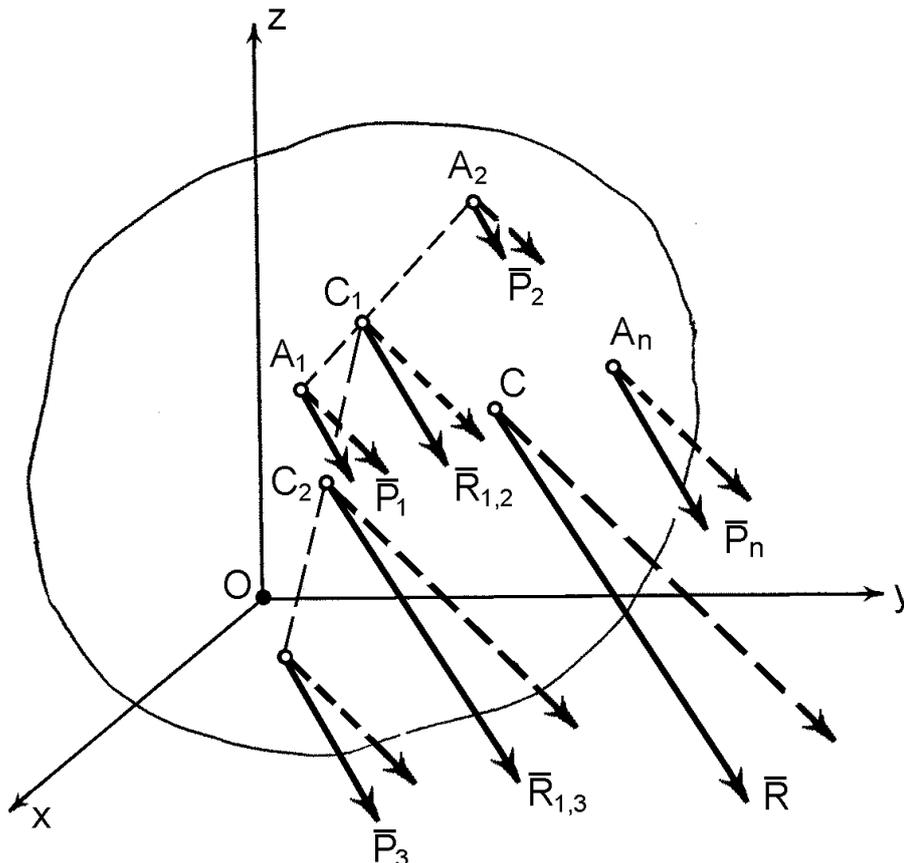


Рис. 1.56

Точка C_1 прикладання цієї рівнодійній $\bar{R}_{1,2}$ визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил, які мають однаковий напрямок. Оскільки сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 прикладені у точках A_1 і A_2 , то, з'єднавши ці точки прямою, можна відшукати положення точки C_1 на цій прямій за відомим рівнянням

$$P_1 \cdot A_1 C_1 = P_2 \cdot A_2 C_1. \quad (1.140)$$

Далі аналогічно додамо сили $\bar{R}_{1,2}$ і \bar{P}_3 , отримуючи їх рівнодійну $\bar{R}_{1,3}$, яка є фактично рівнодійною трьох сил і буде дорівнювати

$$\bar{R}_{1,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{P}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3. \quad (1.141)$$

Точка C_2 прикладання цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,3}$ також визначається за вказаним вище правилом на прямій $C_1 A_3$.

Таким же чином поведимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і остаточно отримаємо рівнодійну \bar{R} системи паралельних сил. Вона буде прикладеною в точці C , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, величина її буде дорівнювати

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.142)$$

Повернемо всі задані сили навколо їх точок прикладання в один бік на один і той же кут і тепер знайдемо їх рівнодійну. Також починаємо з додавання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 . Але, як бачимо з рис. 1.56, а також з рівнянь (1.139) і (1.140), ні модуль рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$, ні положення точки її прикладання C_1 на прямій $A_1 A_2$, не змінюються. Змінюється лише напрямок, який буде паралельним новому напрямку сил.

Якщо провести до кінця додавання паралельних сил, які вже мають новий напрямок, то будемо бачити, що і рівнодійна \bar{R} у даному випадку не змінює ні свого модулю, ні положення точки прикладання C . Змінюється лише напрямок її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної \bar{R} системи паралельних сил завжди співпадає з точкою C , положення якої по відношенню до положення точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, або, взагалі, до тіла завжди буде незмінним. Ця точка має назву центра паралельних сил.

Центр паралельних сил – це точка прикладання їх рівнодійної, яка не змінює свого положення при повороті усіх сил на один і той же кут, в один і той же бік.

Формули координат центра паралельних сил

Припустимо, що до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, яка зведена до рівнодійної сили \bar{R} , що прикладена у точці C (рис. 1.57). Виберемо просторову декартову систему координат $Oxyz$ так, щоб б одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна заданим силам. Знайдемо моменти усіх сил відносно осей координат x, y і z .

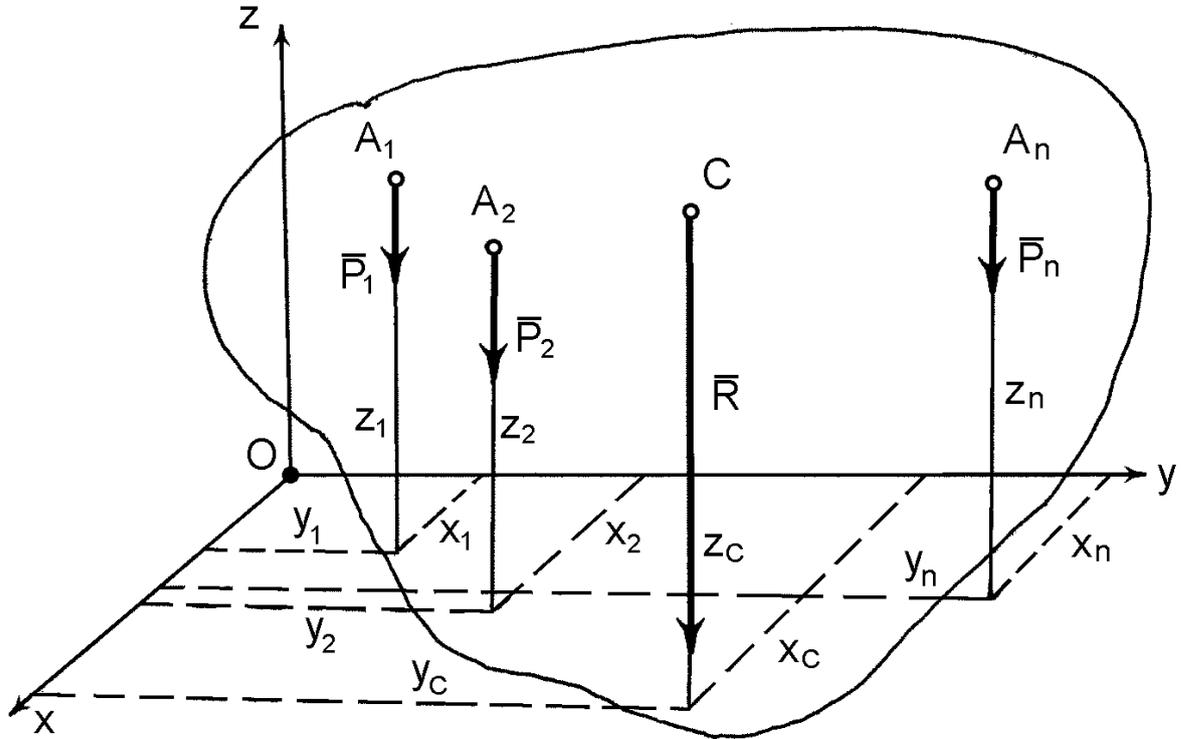


Рис. 1.57

Позначимо у прийнятій системі координат координати точок прикладання сил $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ і $C(x_c, y_c, z_c)$ – точка прикладання рівнодійної \bar{R} .

Обчислимо спочатку моменти всіх сил відносно осі y . Оскільки

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k,$$

то за теоремою Варіньона

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k),$$

а тому

$$R \cdot x_c = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \dots + P_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k. \quad (1.143)$$

Звідки координата x_c буде дорівнювати

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}. \quad (1.144)$$

Аналогічно визначимо моменти усіх сил відносно осі x . Матимемо

$$-R \cdot y_C = -P_1 \cdot y_1 - P_2 \cdot y_2 - P_3 \cdot y_3 - \dots - P_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^n (-P_k \cdot y_k), \quad (1.145)$$

звідки координата y_C буде дорівнювати

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}. \quad (1.146)$$

Далі повернемо всі сили на один і той же кут в один бік (наприклад, на кут 90° , перпендикулярно до площини yOz). Положення точки C , як відомо, при повороті усіх сил на один і той же кут, в один і той же бік не змінюється. Також обчислимо моменти усіх сил відносно осі y . Матимемо

$$R \cdot z_C = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \dots + P_n \cdot z_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k, \quad (1.147)$$

звідки координата z_C буде дорівнювати

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.148)$$

Таким чином, остаточно отримаємо формули для координат центра паралельних сил

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії

На довільну частинку тіла, яке розміщене поблизу поверхні землі, діє сила, що має вертикальний донизу напрямок і яка має назву сила ваги (або просто ваги). Якщо вважати радіус землі достатньо великим (6,4 тис. км), то для тіл, розміри яких у порівнянні з цим радіусом є малими, сили ваги (тяжіння), що діють на частинки тіла, можна вважати паралельними, вони зберігають свою власну величину, незважаючи на будь-які повороти тіла.

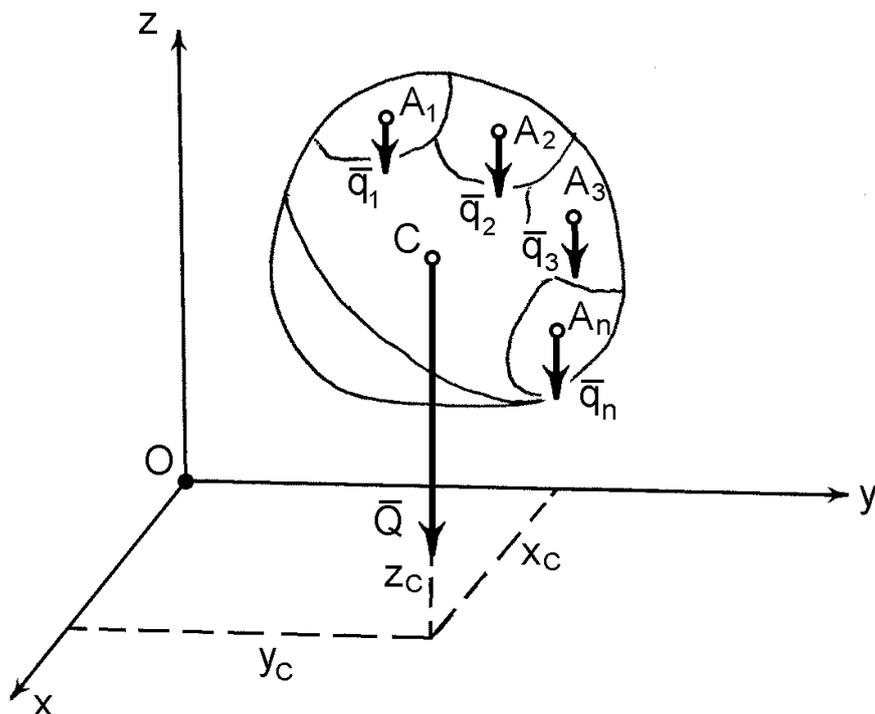


Рис. 1.58

Маємо тіло, яке умовно можна поділити на декілька частин (рис. 1.58). Кожна частина має силу ваги $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$. Як бачимо, це є система паралельних сил, рівнодійну якої \bar{Q} можна знайти. Використовуючи (1.142), визначаємо цю рівнодійну

$$\bar{Q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \dots + \bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k. \quad (1.150)$$

При будь-якому повороті тіла сили \bar{q}_k залишаються прикладеними до тих же самих точок і залишаються паралельними між собою. Змінюється лише напрямок цих сил по відношенню до тіла. А тому рівнодійна \bar{Q} буде при довільному повороті тіла прикладена у точці, яка є центром паралельних сил. Ця точка має назву центра ваги тіла.

Таким чином, *центр ваги тіла – це точка, яка незмінно пов'язана з цим тілом, в якій прикладена сила тяжіння тіла і яка не змінює свого положення при повороті тіла на довільний кут.*

Визначимо координати центра ваги як центра паралельних сил $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$ на підставі виразів (1.149), а саме

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n q_k y_k}{Q}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n q_k z_k}{Q}, \end{aligned} \quad (1.151)$$

де x_k, y_k і z_k - координати прикладання сили тяжіння частини тіла \bar{q}_k .

Якщо тіло є однорідним, то вага кожної частини пропорційна її об'єму, а саме

$$q_k = \gamma \cdot v_k, \quad (1.152)$$

де γ - питома вага (вага одиниці об'єму); v_k - об'єм частини тіла.

Вага усього тіла визначається за такою формулою

$$Q = \gamma \cdot V, \quad (1.153)$$

де V - об'єм тіла; γ - питома вага тіла.

Тепер підставимо (1.152) і (1.153) у (1.151). Причому питома вага γ , як загальний множник, скорочується. Отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma(v_k x_k)}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{k=1}^n v_k x_k}{V}. \quad (1.154)$$

Аналогічно поведимось і при визначенні двох інших координат. Остаточо матимемо координати центра ваги об'єму:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n v_k x_k}{V}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n v_k y_k}{V}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n v_k z_k}{V}. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Як бачимо, центр ваги однорідного тіла залежить тільки від його геометричної форми. А тому, вираз (1.155) носить назву – центр ваги об'єму.

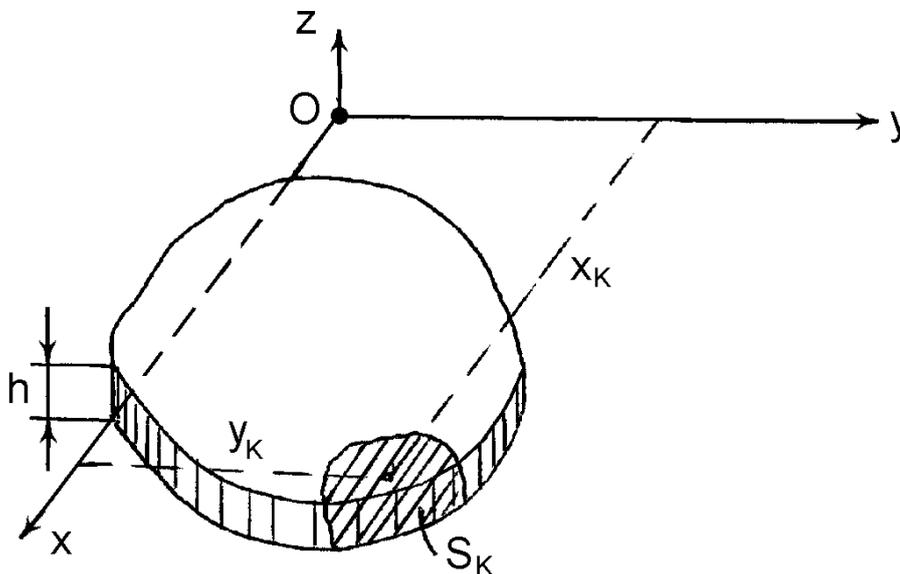


Рис. 1.59

Тепер, якщо розглядати тіло, яке є пластиною (рис. 1.59), товщина якої h відносно мала, то координата z_C центра її ваги буде дорівнювати $z_C = \frac{h}{2}$. Для визначення двох інших координат x_C, y_C використаємо вирази (1.151). Пластину треба уявити у вигляді декількох частин, які мають власну вагу. Далі вважаємо, що вага кожної частки пластини буде дорівнювати

$$q_k = \gamma \cdot v_k = \gamma \cdot h \cdot s_k, \quad (1.156)$$

де γ - питома вага (вага одиниці об'єму); h - товщина пластини;
 S_k - площа частини пластини.

Вага всієї пластини буде дорівнювати

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot h \cdot S, \quad (1.157)$$

де S - площа пластини.

Тепер підставимо (1.156) і (1.157) у перші два вирази (1.151). Зробимо це спочатку для координати x_C , отримаємо

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma h (s_k x_k)}{\gamma h \cdot S} = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}. \quad (1.158)$$

Таким же чином обчислимо значення і другої координати y_C . Остаточно матимемо координати центра ваги тонкої пластини

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}, \quad (1.159)$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S}.$$

Точка, координати якої визначаються формулами (1.159), має назву центра ваги площі.

Тепер визначимо координати центра ваги лінії. Це може бути, наприклад, дріт малого діаметра і постійного поперечного перерізу (рис. 1.60).

Як і в попередніх випадках, спочатку визначимо вагу кожної частини лінії і вагу всієї лінії. Вага частини лінії буде дорівнювати

$$q_k = \gamma \cdot v_k = \gamma \cdot S \cdot l_k, \quad (1.160)$$

де γ - питома вага (вага одиниці об'єму); S - площа поперечного перерізу лінії; l_k - довжина частини лінії.

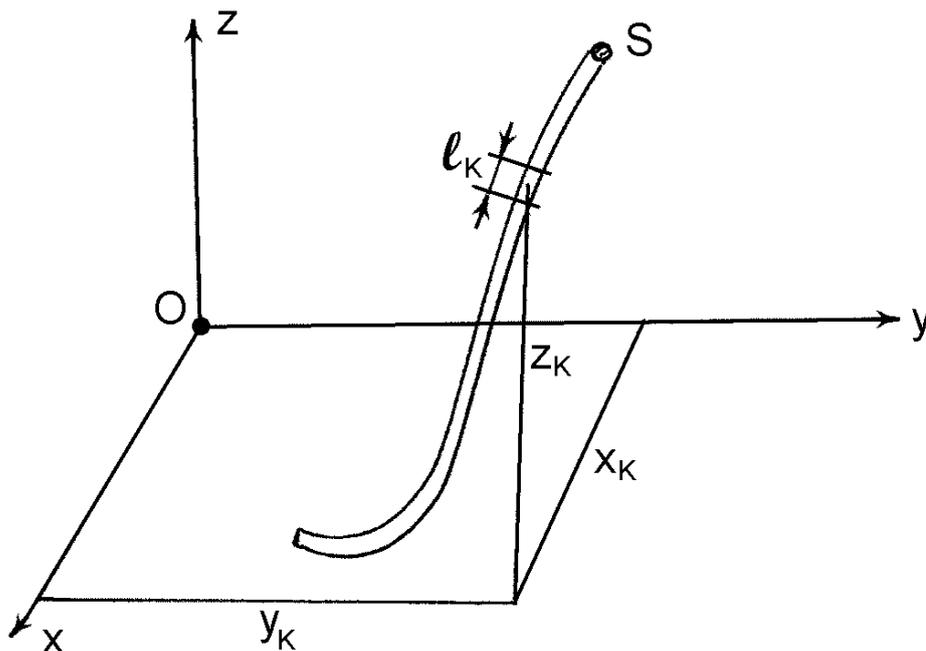


Рис. 1.60

Вага всієї лінії буде дорівнювати

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot S \cdot L, \quad (1.161)$$

де L - загальна довжина лінії.

Тепер підставимо значення (1.160) і (1.161) у (1.151) і визначимо спочатку координату x_C . Вона буде дорівнювати

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma S(l_k x_k)}{\gamma S \cdot L} = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}, \quad (1.162)$$

Таким же чином визначаємо дві інші координати центра ваги лінії. Отже

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n l_k y_k}{L}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n l_k z_k}{L}. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Як бачимо з виразу (1.163), координати центра ваги лінії залежать лише від довжини кожної частини лінії та загальної довжини.

Визначення координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі

Досі визначалися координати центра ваги однорідних тіл, в яких питома вага γ є величиною сталою ($\gamma = const$). Тепер визначимо координати центра ваги неоднорідного твердого тіла.

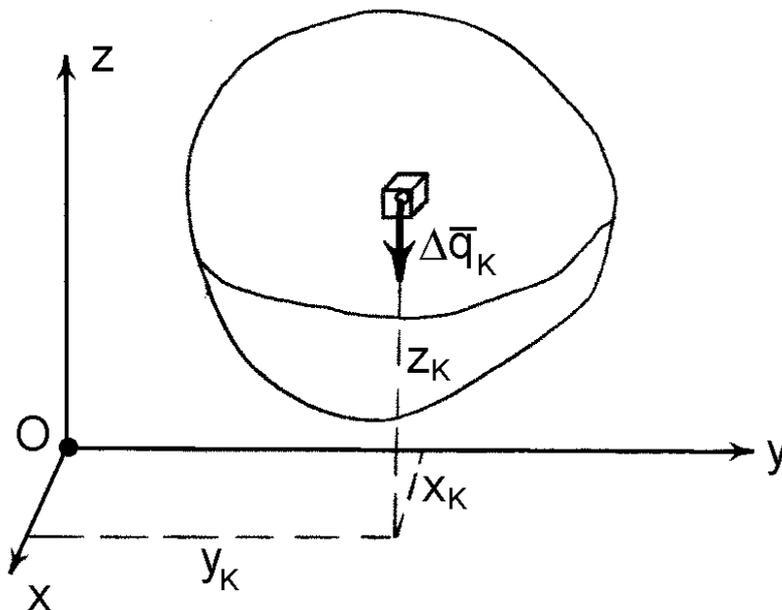


Рис. 1.61

Уявимо неоднорідне тіло довільної форми (рис. 1.61). Розіб'ємо його на n елементарних елементів і виділимо з них один k -й елемент. Позначимо його вагу через $\Delta \bar{q}_k$, x_k , y_k і z_k - координати центра ваги k -того елемента. Підставимо у формули координат центра ваги тіла (1.151) значення ваги елемента $\Delta \bar{q}_k$, отримаємо

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n \Delta q_k \cdot x_k}{Q}, \\
y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n \Delta q_k \cdot y_k}{Q}, \\
z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n \Delta q_k \cdot z_k}{Q}.
\end{aligned}
\tag{1.164}$$

Точка прикладення сили $\Delta \bar{q}_k$ розташована всередині елемента. Для точного визначення точок прикладання цих сил необхідно, щоб об'єм кожного елемента n прямував до нуля, а число елементів необмежено зростало, тобто $n \rightarrow \infty$. А тому необхідно, щоб суми виразу (1.164) розглядалися як границі. А саме

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta q_k}{Q}, \\
y_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta q_k}{Q}, \\
z_C &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \cdot \Delta q_k}{Q},
\end{aligned}
\tag{1.165}$$

де Q - вага всього тіла.

Як відомо, границі сум, що є в чисельниках виразу (1.165), не залежать від вибору точок прикладання сил $\Delta \bar{q}_k$ і є інтегралами, які можуть бути поширені по всьому об'єму тіла, тобто

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta q_k &= \int_{(V)} x dq, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta q_k &= \int_{(V)} y dq, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \cdot \Delta q_k &= \int_{(V)} z dq.
\end{aligned}
\tag{1.166}$$

Тепер, якщо підставити вирази (1.166) у (1.165), остаточно отримаємо координати центра ваги неоднорідного тіла в інтегральній формі

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{\int_{(V)} x dq}{Q}, \\
y_C &= \frac{\int_{(V)} y dq}{Q}, \\
z_C &= \frac{\int_{(V)} z dq}{Q}.
\end{aligned}
\tag{1.167}$$

Аналогічно можна визначити координати центра ваги об'єму тіла в інтегральній формі. Якщо вважати, що

$$dq = \gamma \cdot dV, \quad (1.168)$$

де dV - елемент об'єму тіла,
а

$$Q = \gamma \cdot V, \quad (1.169)$$

де V - об'єм тіла,

то, підставляючи (1.168) і (1.169) у (1.167) і скорочуючи на γ , отримаємо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int x dV}{V}, \\ y_C &= \frac{\int y dV}{V}, \\ z_C &= \frac{\int z dV}{V}. \end{aligned} \quad (1.170)$$

З формул (1.170) випливає, що положення центра ваги однорідного тіла не залежить від фізичних властивостей його матеріалу, а залежить лише від геометричної форми і розмірів тіла.

В інтегральній формі можна визначити координати центра ваги площі. Знайдемо положення центра ваги однорідної пластини, яка має сталу товщину h (рис. 1.62). Координата

z_C центра ваги буде дорівнювати $z_C = \frac{h}{2}$. Визначимо інші дві координати. Також виділимо у пластині елемент об'єму dV у формі елементарної призми з основою dS , висотою h і ребрами, що перпендикулярні площині симетрії пластинки. Елементарний об'єм dV буде дорівнювати

$$dV = h \cdot dS, \quad (1.171)$$

а повний об'єм пластини буде дорівнювати

$$V = h \cdot S, \quad (1.172)$$

де S - площа пластини.

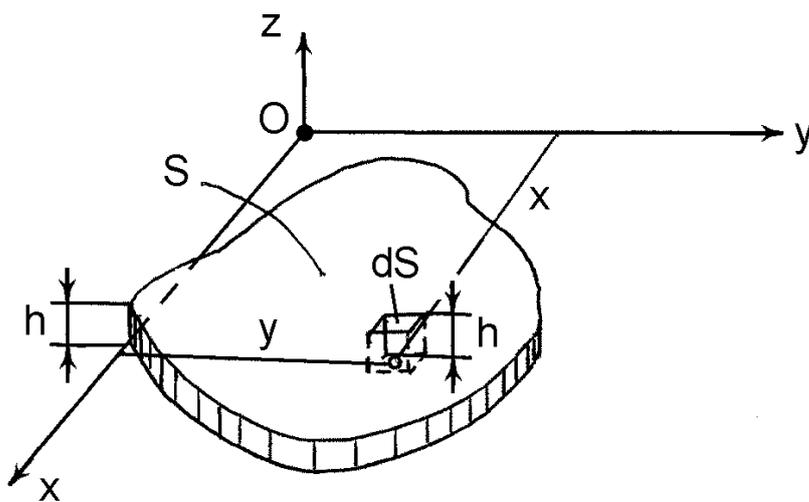


Рис. 1.62

Підставимо (1.171) і (1.172) у перші два рівняння виразу (1.170), одержимо

$$x_C = \frac{\int x dS}{S}, \quad (1.173)$$

$$y_C = \frac{\int y dS}{S},$$

Формули (1.173) є формулами, що визначають координати центра ваги площі.

У формулах (1.173) в чисельниках стоять вирази статичних моментів площі відносно координатних осей Oy і Ox , а саме

$$S_y = \int x dS, \quad (1.174)$$

$$S_x = \int y dS.$$

Таким же чином визначимо координати центра ваги лінії в інтегральній формі. Для цього візьмемо однорідне тіло, наприклад, у вигляді дроту AB з сталою площею поперечного перерізу S і довжиною L (рис. 1.63). Виділимо у дроті елемент dl певного об'єму. Якщо елемент має форму циліндра з основою S та висотою dl , то елементарний об'єм буде дорівнювати

$$dV = S \cdot dl. \quad (1.175)$$

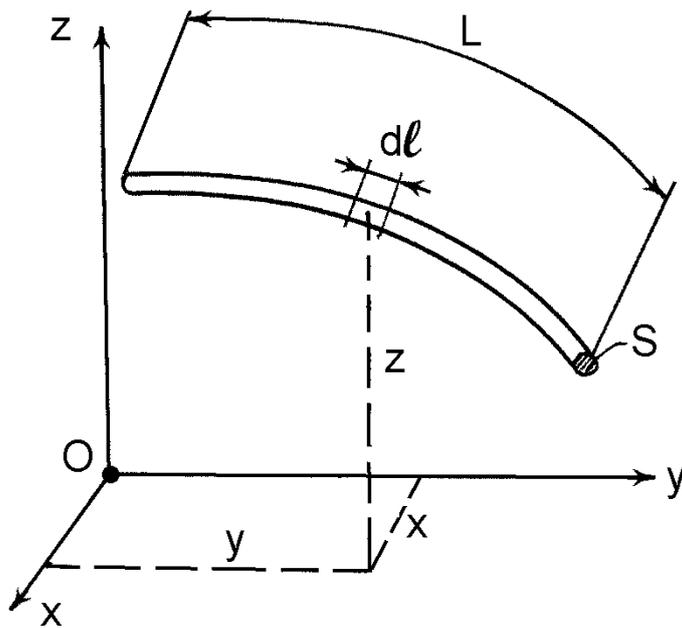


Рис. 1.63

Повний об'єм тіла, що розглядається, буде дорівнювати

$$V = S \cdot L. \quad (1.176)$$

Тепер, підставивши (1.175) і (1.176) у (1.170), визначимо координати центра ваги даного тіла

$$x_C = \frac{\int x dl}{L},$$

$$y_C = \frac{\int y dl}{L}, \quad (1.177)$$

$$z_C = \frac{\int z dl}{L}.$$

Інтеграл, що міститься у чисельниках виразу (1.177), мають назву криволінійних інтегралів. Як бачимо, положення центра ваги однорідного тіла у вигляді дроту не залежить від його поперечних розмірів. А тому формули (1.177) визначають координати центра ваги лінії.

Запитання для самоконтролю:

36. Що називають центром паралельних сил?
37. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
38. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії?
39. Що таке центр ваги тіла?
40. Як записати формули координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі?

Лекція 6.

Тема: Стійкість рівноваги

Способи визначення координат центра ваги тіла

Існує декілька способів визначення координат центра ваги тіл. Серед них розрізняють: метод симетрії, метод розбиття і доповнення, експериментальні способи.

Розглянемо послідовно ці способи.

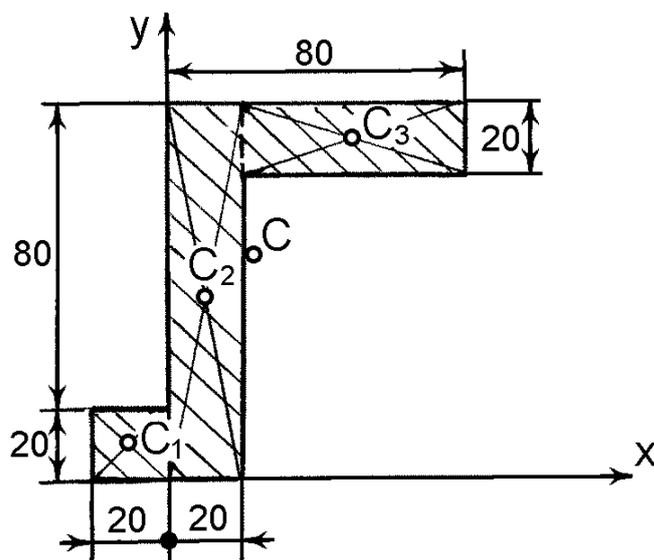
Метод симетрії. Якщо однорідне тіло має площину, вісь, або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.

Таким чином, центр ваги однорідних симетричних тіл, таких як кільця, прямокутні пластини, прямокутні паралелепіеди, кулі та інші тіла, які мають центр симетрії, розташований у геометричних центрах (центри симетрії) цих тіл.

Метод розбиття. Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких частин, для кожної з яких положення центра ваги неважко визначається, то координати центра ваги усього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (1.151), (1.155), (1.159) і (1.163). Причому кількість доданків у чисельнику кожного з указаних виразів буде дорівнювати кількості частин, на яке розбивається тіло.

Наведемо приклад визначення центра ваги тіла методом розбиття його на окремі тіла, центри ваги яких відомі.

Приклад 1. Визначити координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в мм задані на рис. 1.64



(М 1:2)

Рис. 1.64

Розв'язання.

Покажемо осі координат x і y . Розбиваємо пластину на частини, які утворені трьома прямокутниками. Для кожного прямокутника проводимо діагоналі, точки перетину яких c_1, c_2 і c_3 відповідають центрам ваги кожного прямокутника. У прийнятій системі координат неважко отримати значення координат цих точок. А саме: $c_1(-1, 1)$, $c_2(1, 5)$, $c_3(5, 9)$. Площі кожного тіла відповідно дорівнюють: I – $s_1 = 4 \text{ см}^2$; II – $s_2 = 20 \text{ см}^2$; III – $s_3 = 12 \text{ см}^2$. Площа всієї пластини дорівнює: $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$.

Для визначення координат центра ваги заданої пластини використаємо вираз (1.159). Підставимо значення всіх відомих величин у дані рівняння, отримаємо

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = 2,1 \text{ см},$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S} = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = 5,9 \text{ см}.$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги пластини можна позначити точку C на рисунку. Як бачимо, центр ваги (геометрична точка) пластини розташований за її межами.

Доповнення. Спосіб, про який йдеться далі, є частинним випадком способу розбиття. Він може застосовуватись до тіл, які мають вирізи, порожнини, причому без врахування вирізу, або вирізаної частини тіла положення центра ваги тіла відомо. Розглянемо приклад застосування такого методу.

Приклад 2. Визначити положення центра ваги круглої пластини радіусом R , яка має круговий виріз радіуса r (рис. 1.65). Відстань $c_1 c_2 = a$.

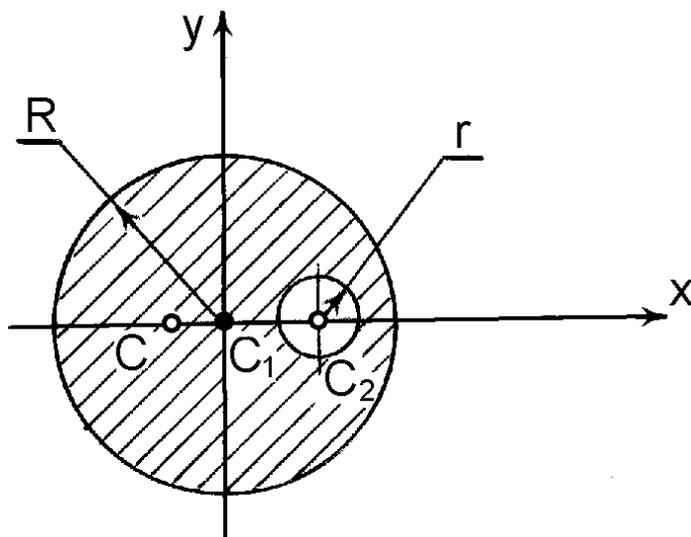


Рис. 1.65

Розв'язання.

Як бачимо з рисунка, центр ваги пластини міститься на осі симетрії пластини x , тобто на прямій, яка проходить крізь точки c_1 і c_2 . Таким чином, для визначення положення центра ваги цієї пластини необхідно обчислити тільки одну координату x_C , оскільки друга координата y_C дорівнює нулю. Покажемо осі координат x, y . Прийmemo, що пластина складається з двох тіл – з повного круга (нібито без вирізу) і тіла, яке утворено вирізом. У прийнятій системі координати x для вказаних тіл будуть дорівнювати: $x_1 = 0$; $x_2 = c_1 c_2 = a$. Площі тіл дорівнюють: $s_1 = \pi R^2$; $s_2 = -\pi r^2$. Загальна площа всього тіла буде дорівнювати фізичній різниці між площами першого і другого тіл, а саме $S = s_1 - s_2 = \pi(R^2 - r^2)$. Для визначення невідомої координати центра ваги заданої пластини використаємо перше рівняння виразу (1.159). Підставимо значення всіх відомих величин у це рівняння, отримаємо

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = \frac{-a \cdot \pi r^2}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{a r^2}{(R^2 - r^2)}.$$

Таким чином, значення координати x_C від'ємне, а тому, оскільки друга координата $y_C = 0$, то центр ваги пластини C розміщений на осі x зліва від точки c_1 .

Експериментальні способи. Ці способи знайшли широке застосування при відшуванні положення центра ваги тіл складних форм і конфігурацій, для яких інші способи майже непридатні внаслідок громіздкості та складності. До таких тіл слід віднести комбайни, трактори, складні сільськогосподарські машини та знаряддя. При застосуванні експериментальних способів відшування положення центра ваги найбільш широко використовують метод підвішування та метод зважування тіл.

При застосуванні методу підвішування тіло на тросі підвішують за різні його точки. Напрямок троса, буде давати кожного разу напрямок сили ваги тіла. Тоді точка перетину цих напрямків і дає положення центра ваги тіла.

Використання другого методу – зважування вимагає вимірювання ваги усього тіла, а також окремих його частин. Розглянемо приклад застосування цього методу.

Приклад 3. Визначимо координати центра ваги трактора, у якого повздовжня база становить l (рис. 1.66).

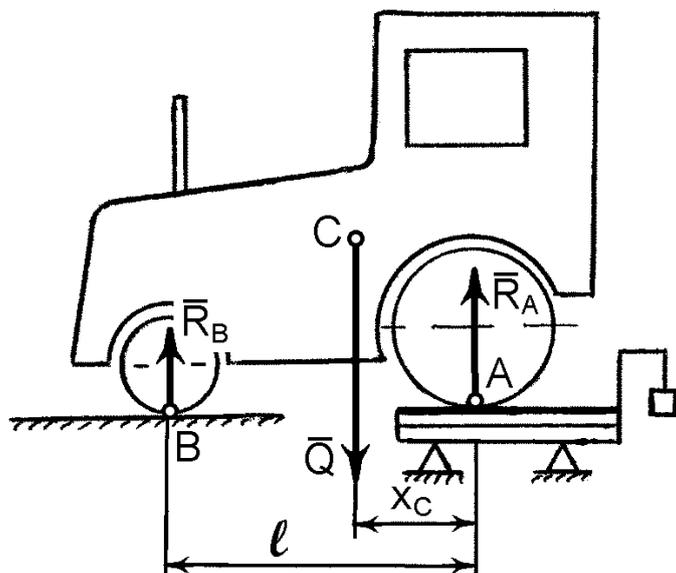


Рис. 1.66

Розв'язання.

Спочатку поставимо на платформу терезів задні колеса трактора, як це показано на рисунку. Отже, визначаємо силу тиску задніх коліс на платформу, або реакцію \bar{R}_A . Аналогічно визначаємо вагу переднього мосту, або реакцію \bar{R}_B . Цілком очевидно, що сума цих реакцій дорівнює загальній вазі трактора, а саме

$$Q = R_A + R_B.$$

Тепер складемо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки A . Вона дорівнює

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; \quad -R_B \cdot l + Q \cdot x_C = 0.$$

Звідки визначаємо поздовжню координату центра ваги:

$$x_C = \frac{R_B l}{Q}.$$

Центри ваги деяких однорідних тіл

Розглянемо визначення центрів ваги деяких однорідних тіл.

1. Центр ваги дуги кола.

Розглянемо дугу AB кола радіусом R , у якої центральний кут OAB дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.67). Покажемо осі координат x, y , початок яких розмістимо у точці O . Внаслідок того, що дуга має вісь симетрії Ox , то центр її ваги буде розташований саме на цій осі ($y_C = 0$). Залишається тільки обчислити координату x_C .

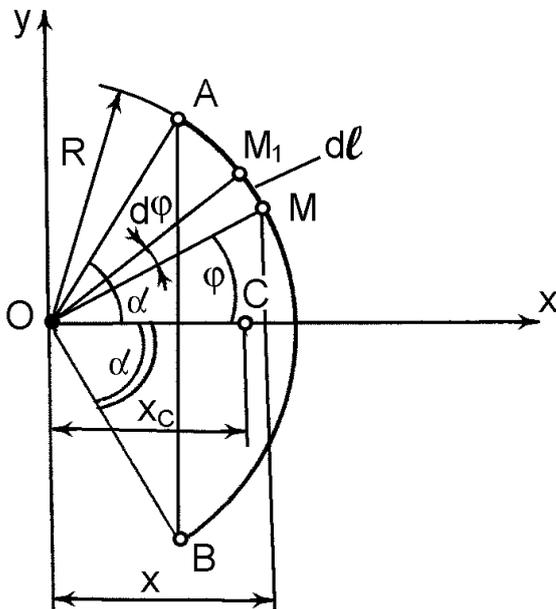


Рис. 1.67

Використаємо для обчислення цієї координати перше рівняння виразу (1.177), а саме

$$x_C = \frac{\int x dl}{L}.$$

Визначимо елементи, які необхідно підставити у це рівняння. Для цього виділимо на дузі AB елемент $M M_1$ довжиною dl , яка дорівнює

$$dl = R \cdot d\varphi. \quad (1.178)$$

Якщо φ – кут, який визначає положення елемента MM_1 на дузі AB , то координата x елемента MM_1 буде дорівнювати

$$x = R \cos \varphi. \quad (1.179)$$

Загальна довжина дуги AB дорівнює

$$L = 2\alpha \cdot R. \quad (1.180)$$

Підставимо ці значення у перше рівняння виразу (1.177). При цьому вважається, що інтеграл у чисельнику даного виразу повинен бути визначеним по всій довжині дуги. Матимемо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{2\alpha} \left\{ \sin \alpha - \left[\sin (-\alpha) \right] \right\} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином, координата x_C буде дорівнювати

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.181)$$

2. Центр ваги трикутника.

Маємо довільний трикутник, вершини якого у прийнятій системі координат xOy відповідають точкам з координатами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ і $A_3(x_3, y_3)$ (рис. 1.68). Якщо провести прямі, які будуть паралельні основі A_1A_3 і провести їх достатню кількість, то вся площа трикутника буде складатися із смуг нескінченно малої ширини, центри ваги яких будуть розміщені посередині кожної смуги, а тому і центр ваги трикутника буде розташований на його медіані. А якщо провести лінії, які паралельні іншій стороні трикутника, то і в цьому випадку центр ваги буде розміщений на його відповідній медіані. Таким чином, цілком очевидно, що центр ваги трикутника C буде розташований у точці перетину його медіан.

Визначимо координати цієї точки. Із курсу аналітичної геометрії відомо, що точка перетину медіан трикутника у прийнятій системі координат визначається такими залежностями

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_C &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned} \quad (1.182)$$

де x_1, x_2, \dots, y_3 - координати вершин трикутника.

Корисно також знати, що

$$\begin{aligned} CA_1 &= \frac{2}{3} A_1B_1; & CB_1 &= \frac{1}{3} A_1B_1; \\ CA_2 &= \frac{2}{3} A_2B_2; & CB_2 &= \frac{1}{3} A_2B_2; \\ CA_3 &= \frac{2}{3} A_3B_3; & CB_3 &= \frac{1}{3} A_3B_3; \end{aligned}$$

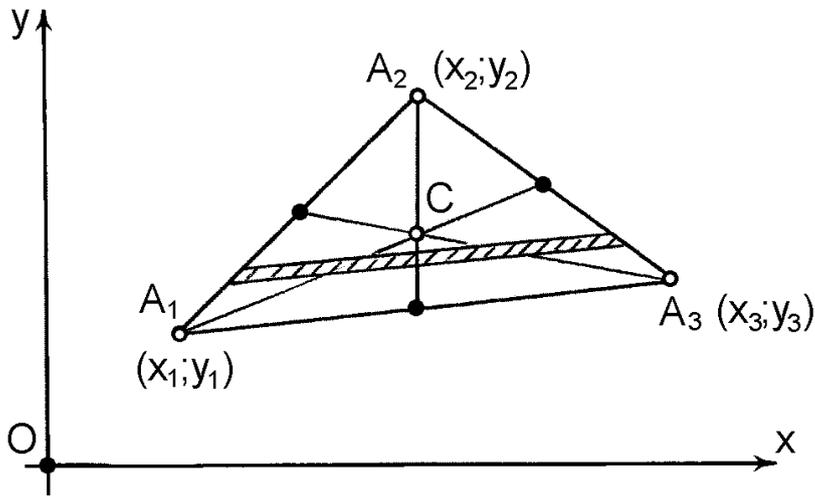


Рис. 1.68

3. Центр ваги сектора.

Розглянемо коловий сектор OAB радіуса R , центральний кут якого дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.69). Центр ваги сектора, цілком очевидно, лежить на осі його симетрії, тобто на бісектрисі кута AOB . Цю бісектрису приймемо за вісь x і знайдемо на цій осі положення центра C . Розіб'ємо площу сектора на нескінченно велике число елементарних секторів з центральними кутами $\Delta\varphi$.

Будемо розглядати кожний сектор як трикутник з основою $R \cdot \Delta\varphi$ і висотою R . Центр ваги кожного трикутника розташований на відстані $r = \frac{2}{3}R$ від центра сектора. Таким чином, центри ваги всіх трикутників розташовані на дузі $A'B'$. Отже, якщо $\Delta\varphi \rightarrow 0$, то центри ваги утворять дугу $A'B'$, тоді необхідно знайти центр ваги дуги кола радіусом r :

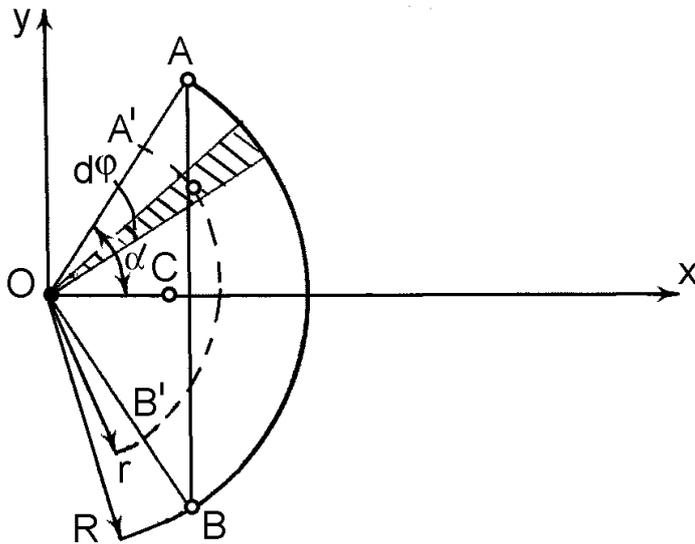


Рис. 1.69

$$x_C = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}$$

Тоді враховуючи, що

$$r = \frac{2}{3}R,$$

$$x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.183)$$

Запитання для самоконтролю:

41. Які існують способи визначення координат центра ваги тіла?
42. Як визначити координати центра ваги дуги кола?
43. Як визначити координати центра ваги трикутника?
44. Як визначити координати центра ваги сектора?

Лекція 7.

Тема: Основні поняття кінематики

Кінематика вивчає рух матеріальних об'єктів як моделей реальних тіл (точка, тверде тіло, суцільне середовище) з геометричної точки зору, як геометричних образів, без викладення причин, які викликають цей рух. Такий підхід не потребує врахування інерційних силових характеристик: мас і моментів інерції, сил і їх моментів.

Рух є формою існування матеріального світу, а механічний рух, найпростіша форма руху матерії, – один із наслідків взаємодії матеріальних тіл. Під ним розуміють зміну положення тіл у просторі протягом часу по відношенню до іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Простір, в якому відбувається рух геометричних абстракцій у формі перелічених матеріальних об'єктів, вважається абсолютним, метричні особливості якого незалежні від руху в ньому матерії у різних точках і напрямках (однорідність і ізотропність простору). Такий простір сприймається як тривимірний, так що кожній точці абсолютного простору відповідають, наприклад, у декартовій системі, три координати. Одиницею виміру простору у Міжнародній системі одиниць СІ є метр.

Властивість абсолютного часу – однорідність і універсальність, він однаково спливає у всіх точках простору, на всіх тілах. Тому можна довільно вибирати початок відліку часу та вимірювати інтервали між окремими проміжками або моментами часу.

За абсолютним простором та часом вводиться поняття системи відліку. Це сукупність системи координат, незмінно пов'язаної з деяким тілом відліку, та пристроєм з періодичним процесом для вимірювання часу (годинник).

У множині систем відліку, в яких можна постулювати простір та час як абсолютні, вибираються так звані інерціальні системи відліку, в яких ізольована матеріальна точка може необмежено довго перебувати у стані спокою або рівномірного та прямолінійного руху під дією системи зрівноважених сил.

Якщо деяка система відліку править за інерціальну із заданим ступенем точності, то можна вказати нескінченну кількість інерціальних систем відліку, які рухаються відносно вибраної поступально, рівномірно та прямолінійно.

При розв'язанні задач небесної механіки, обчисленні траєкторій супутників, приймається геліоцентрична система відліку з початком у центрі мас Сонячної системи і осями координат, спрямованими на нерухомі зірки.

При розв'язанні багатьох технічних задач за інерціальну приймають систему відліку, яка пов'язана з центром Землі (геоцентрична система відліку).

Рух геометричної моделі відносно вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити її положення відносно цієї системи у будь-який момент часу.

Положення моделі відносно даної системи відліку визначається відповідними параметрами, а її рух – кінематичними рівняннями, що виражають зміну цих параметрів як функцій часу.

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб за відомими кінематичними рівняннями руху визначити кінематичні характеристики цього руху: траєкторії точок, їхні лінійні швидкості та прискорення; кутові швидкості та прискорення тіла.

Оскільки кожне тіло складається з матеріальних точок, то природно почати кінематику з вивчення руху матеріальної точки.

Кінематика матеріальної точки

Для того, щоб вивчати рух матеріальної точки, необхідно вибрати спосіб його задання. Існує декілька способів задання руху матеріальної точки.

Кінематично задати рух або закон руху точки означає вказати такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

Способи задання руху матеріальної точки

Для задання руху матеріальної точки можна застосувати один з трьох наступних способів:

1. Векторний;
2. Координатний;

3. Натуральний.

Розглянемо послідовно вказані способи.

Векторний спосіб задання руху матеріальної точки

Цей спосіб знайшов широке застосування у теоретичних розрахунках. Розглянемо сутність цього способу.

Припустимо, що довільна точка M рухається у просторі по деякій траєкторії (рис. 2.1). Візьмемо у просторі прямокутну декартову систему координат $xOyz$ з одиничними векторами (ортами) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. З початку системи координат точки O проведемо до точки M радіус-вектор \bar{r} . При русі точки M її радіус-вектор \bar{r} буде з плином часу змінюватися за величиною (модулем) та напрямом. Таким чином, якщо буде заданий закон зміни радіус-вектора \bar{r} рухомої точки M як функція часу, то рух матеріальної точки вважається заданим векторним способом. Математично це можна записати так:

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad (2.1)$$

де t - час.

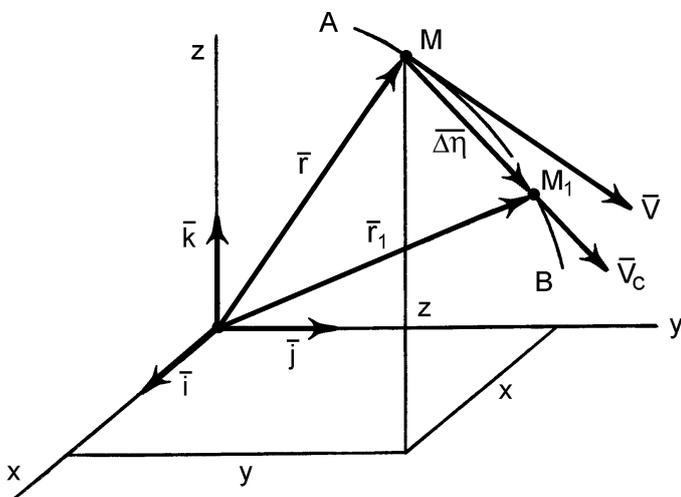


Рис. 2.1

Співвідношення (2.1) називається кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі. Одночасно цей вираз можна розглядати як рівняння траєкторії.

Знайдемо у прийнятій системі координат $Oxyz$ величину радіус-вектора \bar{r} , для чого споектуємо його на осі координат. Отримаємо:

$$\bar{r} = x(t) \bar{i} + y(t) \bar{j} + z(t) \bar{k}, \quad (2.2)$$

де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - поточні значення координат кінця радіус-вектора \bar{r} або, фактично, рухомої точки M .

Визначимо кінематичні характеристики рухомої точки M .

Траєкторією AB руху матеріальної точки M є геометричне місце кінців радіус-вектора \bar{r} або неперервна лінія, яку описує точка під час свого руху відносно даної системи відліку.

Введемо поняття годографа векторної функції $\bar{r}(t)$ (2.1) по скалярному аргументу t . Це крива, яка накреслюється кінцем вектора \bar{r} при неперервній зміні часу t , коли початок вектора залишається у фіксованій точці O . Тобто, годограф описують кінці векторів $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$, що відповідають конкретним положенням точки M у процесі руху. Це стосується не тільки радіус-векторів, а і векторів швидкості, прискорень тощо. В даному разі годограф співпадає з траєкторією AB .

Визначимо другу кінематичну характеристику – швидкість руху матеріальної точки M .

Швидкість – це векторна величина, яка характеризує зміну переміщення за одиницю

$$\text{часу} \left[\frac{м}{с} \right], \left[\frac{км}{год} \right].$$

Для цього розглянемо рух точки M . Вважаємо, що точка рухається по довільній траєкторії AB (рис. 2.1). За деякий проміжок часу Δt точка перемістилась із положення M в положення M_1 (радіус-вектор \vec{r}_1). Для того, щоб визначити переміщення точки M за проміжок часу Δt , з'єднаємо точки M і M_1 і отримаємо вектор $\Delta \vec{r}$, який є геометричною різницею між векторами \vec{r}_1 і \vec{r} . Тоді середня швидкість точки M за проміжок часу Δt (згідно визначення) дорівнює відношенню $\Delta \vec{r}$ до Δt , а саме:

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

а швидкість точки M у будь-який момент часу t буде дорівнювати:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

Як бачимо з останнього виразу, при векторному способі задання руху матеріальної точки її швидкість є першою похідною від радіус-вектора точки по часу.

Напрямок вектора швидкості \bar{v} точки – по дотичній до траєкторії і спрямований у бік її руху.

Прискорення – це векторна величина, яка характеризує зміну вектора швидкості за одиницю часу.

$$\text{Одиниця виміру прискорення} - \left[\frac{м}{с^2} \right].$$

Визначимо прискорення матеріальної точки M . Розглянемо рух точки у площині і вважаємо, що вона рухається по довільній траєкторії (рис. 2.2). У положенні M швидкість точки була \bar{v} . За деякий проміжок часу Δt точка перемістилась у положення M_1 , а її швидкість змінилась і стала дорівнювати \bar{v}_1 . Вказані вектори швидкостей точки будуть спрямовані по дотичних до траєкторії. Знайдемо приріст швидкості за даний проміжок часу. Для цього перенесемо паралельно вектор швидкості \bar{v}_1 у положення M . З'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 і отримаємо вектор $\Delta \bar{v}$. Відношення приросту $\Delta \bar{v}$ вектора \bar{v} до проміжку часу Δt згідно визначення прискорення і буде середнім прискоренням рухомої матеріальної точки M . А саме:

$$\bar{a}_c = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Вектор \bar{a}_c буде паралельним вектору $\Delta \bar{v}$, але не має точки прикладання.

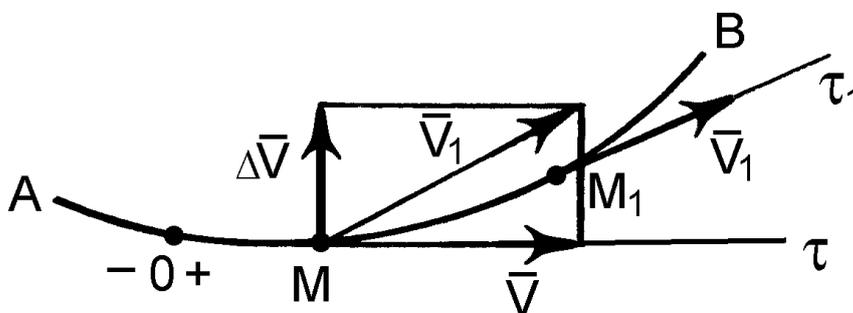


Рис. 2.2

Для отримання миттєвого прискорення матеріальної точки необхідно розглянути нескінченно малий проміжок часу (тобто $\Delta t \rightarrow 0$), а весь вираз (2.5) звести до границі. Отримаємо:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (2.6)$$

Якщо підставити у (2.6) значення швидкості точки (2.4), то матимемо:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (2.7)$$

Таким чином, *при векторному способі задання руху матеріальної точки її прискорення дорівнює першій похідній від швидкості руху точки по часу, або другій похідній від радіус-вектора точки по часу.*

Вектор миттєвого прискорення \bar{a} матеріальної точки буде спрямований у бік угнутості траєкторії, тобто її центра кривизни. Більш детально про напрямок вектора прискорення матеріальної точки буде розглянуто далі.

Координатний спосіб задання руху матеріальної точки

Цей спосіб задання руху матеріальної точки широко використовується при розв'язанні задач, у технічних розрахунках.

При такому способі задання руху матеріальної точки наперед задаються координати матеріальної точки як функції часу. Якщо вибрати у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$, то при русі точки M всі три її координати будуть змінюватися з часом (рис. 2.1). Для того, щоб знати положення точки у будь-який момент часу, а також для визначення її кінематичних характеристик, необхідно задати вирази цих координат як функції часу. В загальному вигляді це можна записати так:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Ці параметричні рівняння, в яких роль параметра відіграє час t , є кінематичними рівняннями руху точки у прямокутній декартовій системі координат і визначають суть даного способу.

Слід зауважити, що якщо рух матеріальної точки здійснюється в одній площині, то в системі (2.8) закон зміни однієї з координат вже не потрібний. Якщо рух точки здійснюється, наприклад, у площині xOy , то система (2.8) набуває такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Якщо матеріальна точка здійснює прямолінійний рух, то досить вибрати лише одну вісь координат, наприклад Ox , сумістивши її з напрямком руху, тоді цей рух буде описаний лише одним рівнянням:

$$x = x(t). \quad (2.10)$$

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки при даному способі задання її руху.

Траєкторія руху.

Рівняння (2.8) та (2.9) фактично є рівняннями траєкторії руху матеріальної точки у параметричній формі, в яких, як було сказано вище, роль параметра відіграє час t . Для знаходження траєкторії руху у звичайній формі необхідно виключити з рівнянь руху час t , тобто здобути залежність між самими координатами. Це можна зробити декількома способами. Наприклад, підстановкою або піднесенням обох частин рівнянь до квадрату та почленним додаванням (якщо рівняння містять тригонометричні функції).

Приклад 2.1.

Рух матеріальної точки здійснюється у площині Oxy і заданий такими рівняннями:

$$x = 2t,$$

$$y = 12t^2.$$

Визначити траєкторію руху точки.

Розв'язування.

Траєкторію руху матеріальної точки можна визначити одним з двох способів:

а) траєкторію руху можна визначити, задаючи різні моменти часу та зображаючи координати точки x, y на графіку;

б) траєкторію руху можна також визначити, якщо виключати час t із заданих рівнянь руху. Так, з першого рівняння час буде дорівнювати $t = \frac{x}{2}$. Тоді після підстановки часу у друге рівняння, матимемо

$$y = \frac{12x^2}{4} = 3x^2.$$

Таким чином, траєкторією руху точки є парабола з вершиною, яка розташована в початку координат і віссю симетрії Oy .

Приклад 2.2.

Рух матеріальної точки заданий рівняннями:

$$x = 3 \sin t,$$

$$y = 3 \cos t,$$

де x і y - в [см], t - в [с].

Визначити траєкторію руху точки.

Розв'язування.

Рівняння траєкторії руху можна визначити, якщо вилучити час t з рівнянь руху. Перепишемо рівняння руху матеріальної точки таким чином:

$$\sin t = \frac{x}{3},$$

$$\cos t = \frac{y}{3}.$$

Підносячи до квадрату і додаючи окремо ліві і праві частини цих виразів, матимемо:

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2},$$

або

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

Отже, рівнянням траєкторії руху матеріальної точки буде рівняння кола радіусом $R = 3$ [см] з центром у початку координат.

Швидкість руху

Для визначення швидкості руху матеріальної точки при координатному способі задання використаємо основні положення, які були отримані при розгляді векторного способу задання руху матеріальної точки. З цією метою підставимо вираз (2.2) у вираз (2.4), матимемо:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (2.11)$$

З іншого боку, вектор швидкості \bar{v} (як і будь-який інший вектор) можна у прийнятій системі координат $Oxyz$ представити через його проекції на осі координат. А саме:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}, \quad (2.12)$$

де v_x, v_y , і v_z - проекції вектора швидкості на відповідні осі координат.

Якщо розглянути вирази (2.11) і (2.12), то можна побачити, що є можливість прирівняти коефіцієнти при одиничних векторах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ і отримати такі вирази:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким чином, проекції вектора швидкості матеріальної точки на координатні осі дорівнюють першим похідним по часу від відповідних координат.

Якщо відомі проекції вектора на осі координат, то є можливість скласти їх геометрично і отримати модуль вектора швидкості. Матимемо:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.14)$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v} визначається через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{x}, \bar{v}) &= \frac{v_x}{v}, \\ \cos(\hat{y}, \bar{v}) &= \frac{v_y}{v}, \\ \cos(\hat{z}, \bar{v}) &= \frac{v_z}{v}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Прискорення руху.

Для визначення прискорення руху матеріальної точки при координатному способі задання руху поведимося аналогічно, як і в випадку визначення швидкості руху. А саме: значення радіус-вектора \bar{r} (2.2) підставимо у вираз (2.7), визначимо другу похідну і знайдемо прискорення

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}. \quad (2.16)$$

З іншого боку, вектор прискорення \bar{a} можна у прийнятій системі координат $Oxyz$ подати у вигляді його проекцій на осі координат. А саме:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \quad (2.17)$$

Якщо порівняти (2.16) і (2.17), то можна написати такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\
 a_y &= \frac{d^2y}{dt^2}, \\
 a_z &= \frac{d^2z}{dt^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Таким чином, проєкції вектора прискорення матеріальної точки на осі координат дорівнюють другим похідним по часу від відповідних координат.

Якщо відомі проєкції вектора прискорення на осі координат, то є можливість скласти їх геометрично і отримати модуль самого вектора. Матимемо:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.
 \tag{2.19}$$

Напрямок вектора \bar{a} також визначається через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned}
 \cos(x, \hat{\bar{a}}) &= \frac{a_x}{a}, \\
 \cos(y, \hat{\bar{a}}) &= \frac{a_y}{a}, \\
 \cos(z, \hat{\bar{a}}) &= \frac{a_z}{a}.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Таким чином, при координатному способі задання руху матеріальної точки, якщо цей рух здійснюється у просторі, її швидкість \bar{v} і прискорення \bar{a} визначаються відповідно за допомогою виразів (2.13), (2.14), (2.15), (2.18), (2.19) і (2.20). Якщо рух здійснюється у площині, то у всіх цих формулах відкидається одна координата, а якщо прямолінійно, то відкидаються дві координати.

Лекція 8.

Тема: Кінематика точки

Натуральний спосіб задання руху матеріальної точки

Визначимо спочатку кінематичне рівняння руху при цьому способі задання руху матеріальної точки.

Натуральний спосіб задання (опису) руху матеріальної точки застосовується тоді, коли траєкторія точки заздалегідь відома. Рух матеріальної точки вивчається відносно фіксованої системи відліку. Задається і закон руху точки вдовж траєкторії.

Таким чином, для задання руху натуральним способом необхідно знати:

1. Траєкторію AB (рис. 2.3), яка може бути задана рівнянням, графічно чи вказівкою, наприклад: точка рухається вдовж кола радіусом R .

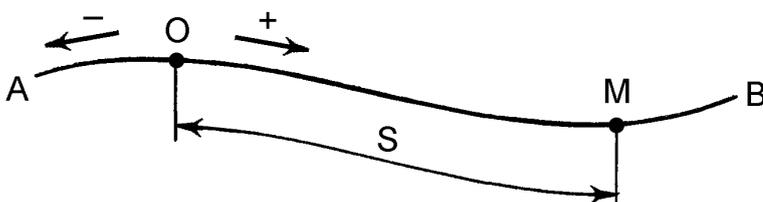


Рис. 2.3

2. Початок відліку O криволінійної координати S на траєкторії руху з вказівкою додатних “+” і від’ємних “-” значень. Крім того, задається початок відліку часу t . Звичайно приймають, що $t = 0$ в момент, коли точка M проходить через точку O на траєкторії руху.

3. Закон руху матеріальної точки вздовж траєкторії. Якщо, наприклад, у момент часу t точка займає положення M , криволінійна координата якого дорівнює S , то це записується наступним чином:

$$S = S(t). \quad (2.21)$$

Ця функція повинна бути неперервною і принаймні двічі диференційованою.

Співвідношення (2.21) називається кінематичним рівнянням руху матеріальної точки у натуральній формі.

Криволінійну координату не слід плутати з довжиною шляху, який проходить точка за певний проміжок часу як у додатному, так і у від’ємному напрямках.

Визначення швидкості руху матеріальної точки.

Розглянемо схему на рис. 2.3. Положення точки M відповідає моменту часу t , а положення $M_1 - t_1$. Тоді проміжку часу $t_1 - t = \Delta t$ відповідає зміна криволінійної координати $S_1 - S = \Delta S$. Звідси можна визначити середню швидкість точки за проміжок часу Δt :

$$v_c = \frac{S_1 - S}{t_1 - t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

А миттєву швидкість (у будь-який момент часу) можна визначити, якщо взяти границю відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, коли Δt прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \quad (2.22)$$

Модуль швидкості точки з натуральним описом руху дорівнює першій похідній по часу від криволінійної координати S . Напрямок вектора швидкості – по дотичній до траєкторії руху.

Похідна по часу визначає чисельну алгебраїчну величину швидкості, тобто, якщо $v > 0$, то вектор швидкості напрямлений у додатньому напрямку відліку, а якщо $v < 0$, то протилежно.

Приклад 2.3.

Закон руху матеріальної точки заданий рівнянням $S = 4t^2 + t$ [м]. Визначити пройдений шлях та швидкість руху точки за 1 секунду.

Розв’язування.

Визначимо спочатку, який шлях на траєкторії руху пройде матеріальна точка за 1 [с]. Оскільки відлік часу почався з початком моменту руху, то $S(0) = 0$. Для знаходження відстані, що пройдена матеріальною точкою за 1 [с], підставимо у рівняння руху значення цього часу. Матимемо

$$S = 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \text{ [м]}.$$

Для визначення швидкості руху точки продиференціюємо рівняння руху. Матимемо:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(4t^2 + t)}{dt} = 8t + 1 \text{ [м/с]}.$$

З отриманого значення швидкості руху матеріальної точки можемо визначити (підстановкою t), що з початку руху (при $t = 0$) $v(0) = 1$, а при $t = 1$ – $v(1) = 9$ [м/с].

Натуральний тригранник.

Наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії, які знадобляться для визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки.

Припустимо, що крива AB є траєкторією точки M (рис. 2.4). У довільній точці M та у нескінченно наближеній до неї точці M_1 проведемо дотичні до цієї кривої (орти, відповідні цим дотичним, позначимо через $\bar{\tau}$ та $\bar{\tau}_1$). Потім перенесемо вектор $\bar{\tau}_1$ паралельно самому собі у точку M і проведемо через вектори $\bar{\tau}$ та $\bar{\tau}_1$ площину Q .

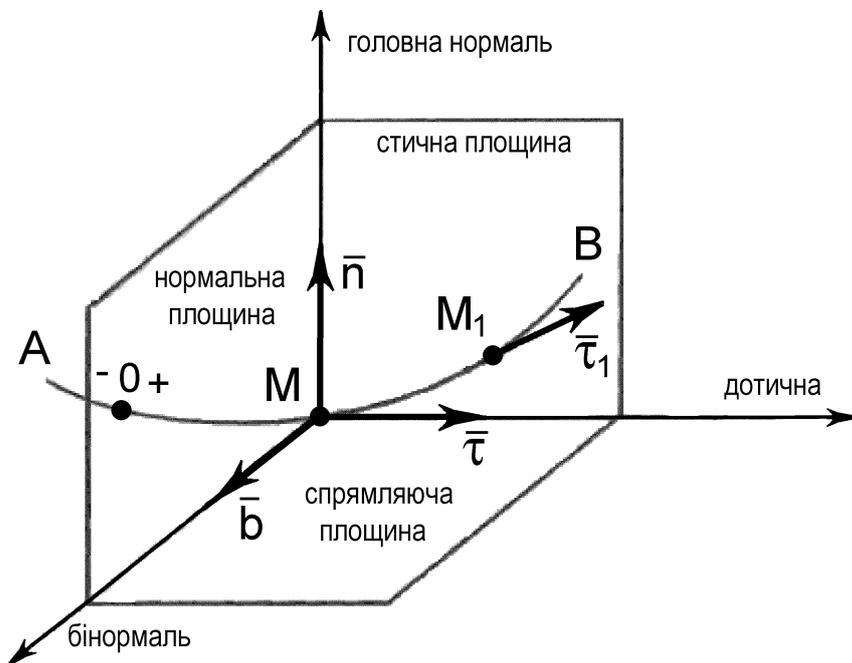


Рис. 2.4

Площина, яка є граничним положенням площини Q , коли точка M_1 прямує до точки M , називається стичною площиною.

Через точку M проведемо площину, що перпендикулярна до дотичної $\bar{\tau}$, яка називається нормальною. Очевидно, що будь-яка пряма у цій площині, яка проходить через точку M , буде перпендикулярна до $\bar{\tau}$, тобто буде нормаллю до кривої.

Лінія перетину нормальної та стичної площин визначає головну нормаль до кривої. Отже, головна нормаль – це єдина з нескінченної множини нормалей до кривої у точці M , яка розташована у стичній площині. Площина, що проходить через точку M перпендикулярно до головної нормалі, називається спрямляючою.

Лінія перетину спрямляючої та нормальної площин визначає бінормаль кривої. Очевидно, що бінормаль перпендикулярна до головної нормалі.

Таким чином, у кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями, за якими можна провести дотичну у бік зростання дугової координати (відповідний орт $\bar{\tau}$), головну нормаль – у бік угнутості кривої (відповідний орт \bar{n}), бінормаль з відповідним ортом \bar{b} , спрямовану так, що орти $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} утворюють праву ортогональну трійку векторів.

Прямокутна система координатних осей з оортами $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} і з початком у рухомій точці M називається системою натуральних осей, або натуральним рухомих тригранником.

Зауважимо, що плоска крива повністю розташована у стичній площині, а головна нормаль буде нормаллю до кривої у цій площині. Натуральний тригранник рухається разом з точкою і змінює свою орієнтацію у просторі у відповідності з характером самої кривої.

Кривизна кривої.

Як можна побачити далі, прискорення точки у криволінійному русі залежить від кривизни траєкторії, тому розглянемо цю характеристику. На рис. 2.5 зображена траєкторія AB руху точки і два близькі положення M та M_1 . Проведемо через точки M та M_1 дотичні τ і τ_1 . Відстань між точками вдовж траєкторії дорівнює ΔS .

Кут $\Delta\varphi$ між дотичними у двох близьких точках називається кутом суміжності.

Кривизною кривої K у даній точці M називається границя відношення кута суміжності до дуги ΔS , яка його стягує, коли ця дуга прямує до нуля, тобто:

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \quad (2.23)$$

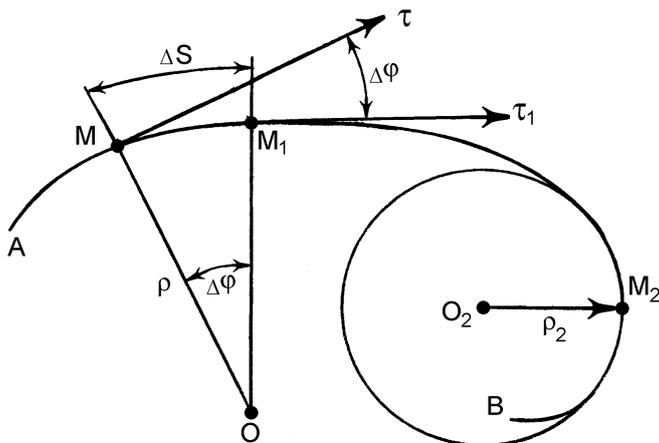


Рис. 2.5

Розглянемо коло радіусом R (рис. 2.6). Зробимо аналогічну геометричну побудову. Виразимо ΔS за відомою формулою

$$\Delta S = R \Delta \varphi$$

і підставимо у (2.23). Матимемо

$$K = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{R \Delta \varphi} = \frac{1}{R},$$

тобто

$$K = \frac{1}{R}. \quad (2.24)$$

Таким чином, коло радіусом R є кривою сталої кривизни, значення якої дорівнює оберненій величині радіуса.

Для визначення кривизни довільної кривої досить підібрати таке коло, елемент дуги якого краще за все апроксимує ділянку кривої у даній точці. Тоді радіус цього кола буде радіусом кривизни кривої, а центр кола – центром кривизни. Це показано на рис. 2.5:

ρ_2 - радіус кривизни кривої у точці M_2 ,

O_2 - центр кривизни,

$K_2 = \frac{1}{\rho_2}$ - кривизна кривої у точці M_2 .

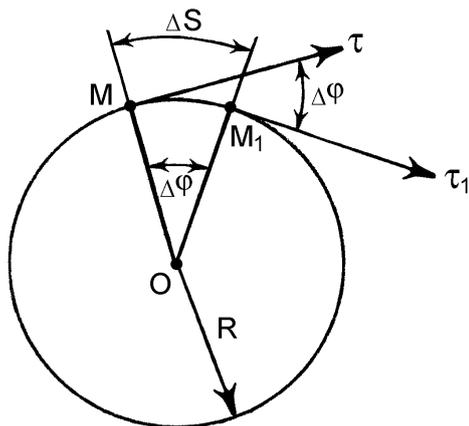


Рис. 2.6

Дотичне і нормальне прискорення точки у натуральних осях

У декартових осях ми визначали прискорення точки у проекціях на осі x , y , z . У натуральних осях визначимо проекції вектора прискорення на дотичну і головну нормаль. Але спочатку доведемо, що проекція вектора прискорення на бінормаль дорівнює нулю. Звернемось до рис. 2.7. Швидкості близьких точок M і M_1 – вектори \bar{v} і \bar{v}_1 , які напрямлені по дотичних у цих точках. Перенесемо вектор \bar{v}_1 у точку M і з'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 . Побудувавши паралелограм, можна побачити, що вектор $\Delta\bar{v}$, як різниця швидкостей, формує вектор прискорення і розташований в стичній площині.

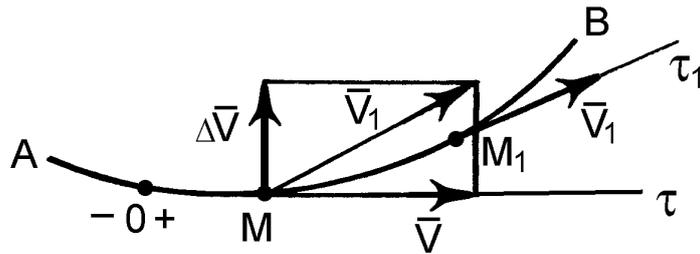


Рис. 2.7

Паралельно $\Delta\bar{v}$ напрямлений і вектор середнього прискорення \bar{a}_c , а вектор миттєвого прискорення буде дорівнювати

$$\bar{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t},$$

і також буде розташований в дотичній площині. А це означає, що проекція прискорення на бінормаль дорівнює нулю.

Тепер, знаючи, що вектор прискорення має тільки дотичну і нормальну складові, визначимо останні.

Для цього нам знадобиться рис. 2.8.

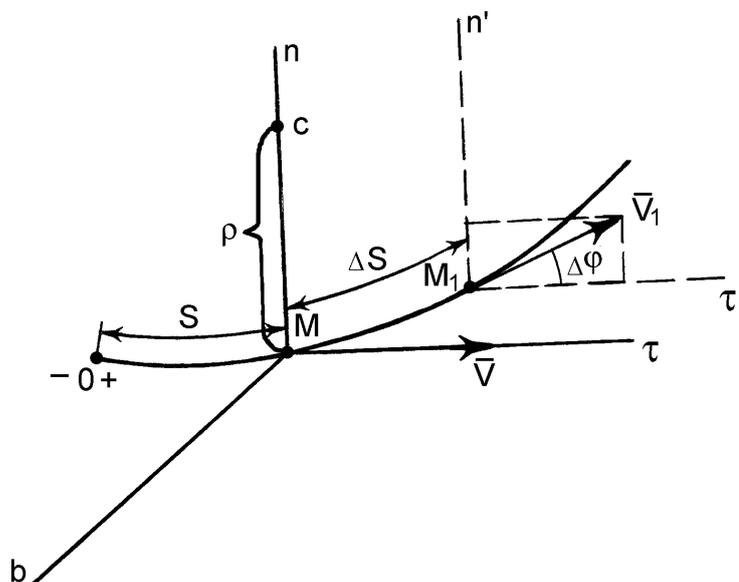


Рис. 2.8

На рис 2.8:

- $M\tau$ – дотична,
- Mn – головна нормаль,
- Mb – бінормаль,
- C – центр кривизни,
- ρ – радіус кривизни.

Припустимо, що в момент t точка M мала швидкість \bar{v} , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – швидкість \bar{v}_1 . Тоді прискорення дорівнює

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t}$$

Переходимо до проєкцій прискорення на натуральні осі τ і n . Матимемо

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad (2.25)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}. \quad (2.26)$$

Враховуючи, що проєкції векторів на паралельні осі однакові, проведемо через точку M_1 осі $M_1\tau'$ і M_1n' , які відповідно паралельні осям $M\tau$ і Mn , і позначимо кут суміжності $\Delta\varphi$.

Знайдемо проєкції векторів \bar{v} і \bar{v}_1 на осі $M\tau$ і Mn :

$$\begin{aligned} v_\tau &= v, \\ v_n &= 0, \\ v_{1\tau} &= v_1 \cos \Delta\varphi, \\ v_{1n} &= v_1 \sin \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Підставимо значення проєкцій у вирази 2.25 і 2.26. Матимемо

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad (2.27)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.28)$$

Коли Δt прямує до нуля, то

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\rightarrow M, \\ \Delta\varphi &\rightarrow 0, \\ \Delta S &\rightarrow 0, \\ v_1 &\rightarrow v, \\ \cos \Delta\varphi &\rightarrow 1. \end{aligned} \right\}$$

Тоді рівняння (2.27) може бути записане, як показано нижче, і дотичне прискорення дорівнює

$$\begin{aligned} a_\tau &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \\ a_\tau &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Таким чином, дотичне прискорення точки дорівнює першій похідній від функції швидкості по часу або другій похідній від криволінійної координати по часу.

Перетворимо вираз для нормального прискорення (2.28), помноживши чисельник і знаменник на добуток $\Delta\varphi \cdot \Delta S$. Отримаємо

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right). \quad (2.30)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{v_1 \rightarrow v} v_1 &= v, \\ \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} &= 1 - \text{перша важлива границя}, \\ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} &= \frac{1}{\rho} - \text{кривизна}, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} &= \frac{dS}{dt} = v. \end{aligned} \right\}$$

Підставимо значення цих границь у вираз (2.30). Матимемо

$$a_n = v \cdot 1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho},$$

або

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.31)$$

Нормальне прискорення точки дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у даній точці.

Вектор нормального прискорення \bar{a}_n завжди напрямлений вздовж нормалі до центру кривизни в даній точці.

Нормальне прискорення a_n завжди додатне, тому що має вираз v^2 , дотичне прискорення a_τ може бути як додатним, так і від'ємним.

Вектор повного прискорення – діагональ прямокутника (рис. 2.9), модуль якого дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

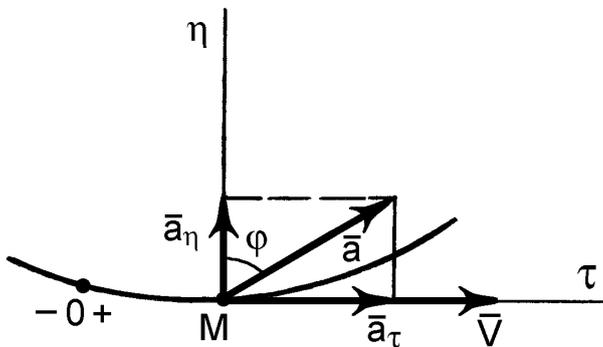


Рис. 2.9

Кут між вектором \bar{a} і нормаллю визначається $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n}$.

Вектор прискорення через його проєкції може бути записаний наступним чином:

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n}, \quad (2.32)$$

де $\bar{\tau}$, \bar{n} - відповідно орти дотичної і нормалі натуральних осей координат.

Частинні випадки руху матеріальної точки

1. Прямолінійний рух.

Радіус кривизни в цьому випадку буде дорівнювати $\rho = \infty$, тому

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Висновок: швидкість точки змінюється лише чисельно, за модулем. Це означає, що дотичне прискорення характеризує зміну вектора прискорення за модулем.

А якщо цей рух є ще і рівномірним, тобто, коли $v = const$, то

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

$$a = 0.$$

2. Рівномірний криволінійний рух.

У даному випадку $v = const$, $\rho \neq \infty$. Визначимо прискорення руху матеріальної точки. Воно буде дорівнювати

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = a.$$

Таким чином, повне прискорення точки дорівнює нормальному прискоренню.

Вектор повного прискорення напрямлений по нормалі до траєкторії. Оскільки прискорення з'являється тільки за рахунок зміни напрямку вектора швидкості, то нормальне прискорення характеризує цю зміну.

3. Рівнозмінний криволінійний рух.

У цьому випадку рух точки є криволінійним, прискореним але прискорення a_τ є величина постійна. Цей випадок носить назву рівнозмінного руху (тобто, коли за рівні проміжки часу швидкість руху точки змінюється на одну і ту ж величину, причому або збільшується, або зменшується).

Визначимо кінематичні характеристики такого руху точки. Оскільки $a_\tau = const$, а

$a_\tau = \frac{dv}{dt}$, то звідси є можливість визначити швидкість руху точки, а саме:

$$dv = a_\tau \cdot dt.$$

Швидкість знаходиться під знаком диференціала, а тому для її знаходження необхідно взяти інтеграл від лівої та правої частин останнього виразу. Використовуємо для цього визначені інтегралі, для яких задаємо верхню та нижню границі змінних величин. Матимемо

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt,$$

звідки

$$v - v_0 = a_\tau t,$$

або

$$v = v_0 + a_\tau t,$$

де v_0 - початкова швидкість руху матеріальної точки.

Використаємо вираз $v = \frac{dS}{dt}$, з якого маємо можливість визначити dS . Воно буде

дорівнювати

$$dS = v \cdot dt.$$

Замість v підставимо в останній вираз його значення. Матимемо

$$dS = v_0 \cdot dt + a_\tau t \cdot dt.$$

Як і у попередньому випадку знайдемо переміщення S , взявши визначені інтеграли від лівої і правої частин останнього виразу. Також задаємо верхні та нижні границі змінних величин. Матимемо

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt,$$

звідки

$$S - S_0 = v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Остаточно переміщення точки можна переписати так

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

де S_0 - початкове переміщення точки.

Таким чином, при рівнозмінному русі матеріальної точки її швидкість та переміщення визначаються за допомогою знайдених виразів. Слід зауважити, що знаки у правих частинах цих формул (перед a_τ) показують характер рівнозмінного руху. Так, якщо вони додатні, то рух точки є рівноприскореним, а якщо від'ємні, то рівносповільненим.

Приклад 2.3.

Палець кривошипа дизеля рухається відповідно заданих параметрично рівнянь

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ y &= a \cos \omega t, \end{aligned} \right\}$$

де x і y - у [м], t - у [с].

Визначити траєкторію руху, швидкість та прискорення пальця.

Розв'язування.

Для знаходження траєкторії руху пальця треба виключити з рівнянь руху параметр t . Спочатку визначимо з заданих рівнянь тригонометричні функції

$$\sin \omega t = \frac{x}{a},$$

$$\cos \omega t = \frac{y}{a}.$$

Оскільки тригонометричні функції одного аргументу, піднесемо у квадрат ліві та праві частини цих виразів і додамо їх почленно. Матимемо

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1.$$

Ліва частина останнього виразу дорівнює одиниці, оскільки $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, тоді

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1,$$

або

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Таким чином, з останнього виразу бачимо, що траєкторією руху пальця є коло радіуса a з центром у початку координат.

Для визначення швидкості руху знайдемо спочатку проекції швидкості руху пальця на координатні осі. Вони дорівнюють

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega \cdot \cos \omega t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -a\omega \cdot \sin \omega t.$$

Модуль швидкості руху пальця буде дорівнювати

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(a\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-a\omega \cdot \sin \omega t)^2} = a\omega.$$

Таким чином, з останнього виразу бачимо, що палець рухається з постійною швидкістю, яка дорівнює $a\omega$.

Знайдемо прискорення пальця. Також визначимо його через проекції на осі координат. Для цього візьмемо другі похідні від заданих координат руху. А саме

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -a\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення буде

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-a\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-a\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = a\omega^2.$$

Оскільки палець рухається по колу, тобто по криволінійній траєкторії руху постійного радіуса a , то його прискорення можна було б визначити, якщо використати формули при натуральному способі задання руху матеріальної точки. Дотичне прискорення пальця буде дорівнювати нулю, оскільки $a\omega = \text{const}$. А саме

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(a\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення визначимо так

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(a\omega)^2}{a} = a\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному, а саме

$$a = a_n = a\omega^2.$$

Таким чином, як бачимо, прискорення пальця, визначені різними способами, співпадають.

Приклад 2.4.

Точка на ободі маховика зернозбирального комбайна у період розгону рухається згідно рівняння $S = 0,1 \cdot t^3$ (S - у [м], t - у [с]). Радіус маховика дорівнює $R = 0,5$ [м]. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість дорівнює $v = 30$ [м/с].

Розв'язування.

Рівняння руху точки задане натуральним способом, а тому швидкість можливо визначити так

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^3)}{dt} = 0,3 \cdot t^2.$$

По заданому значенню швидкості точки $v = 30 \left[\frac{m}{c} \right]$ знайдемо час. Підставимо значення швидкості в отриманий вираз і знайдемо t . Матимемо

$$30 = 0,3 \cdot t^3,$$

звідки

$$t = \sqrt[3]{\frac{30}{0,3}} = 4,6 [c].$$

Дотичне прискорення точки буде дорівнювати

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(0,3 \cdot t^2)}{dt} = 0,6t = 2,8 \left[\frac{m}{c^2} \right].$$

Нормальне прискорення визначимо так

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,3 \cdot t^2)^2}{0,5} = 80,6 \left[\frac{m}{c^2} \right].$$

Знак "+" перед дотичним прискоренням a_τ означає, що маховик зернозбирального комбайна знаходиться у стані розгону, що відповідає умові задачі.

Лекція 9.

Тема: Поступальний та обертальний рух твердого тіла

Раніше було розглянуто кінематику матеріальної точки. Перейдемо далі до вивчення руху твердого тіла та розглянемо його найпростіші види, до яких відносяться поступальний і обертальний рухи твердого тіла.

Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, що проведена на цьому тілі, переміщується, завжди залишаючись паралельною самій собі.

Приклади поступального руху:

1. Рух кузова автомобіля на прямолінійній ділянці дорожнього полотна.
2. Рух спарника AB , який з'єднує кривошипи O_1A і O_2B , усі точки якого рухаються уздовж кола (рис. 2.10.). Безумовно, що $O_1A = O_2B$.
3. Рух педалі велосипеда відносно рами, поршня двигуна відносно циліндра і т.п.

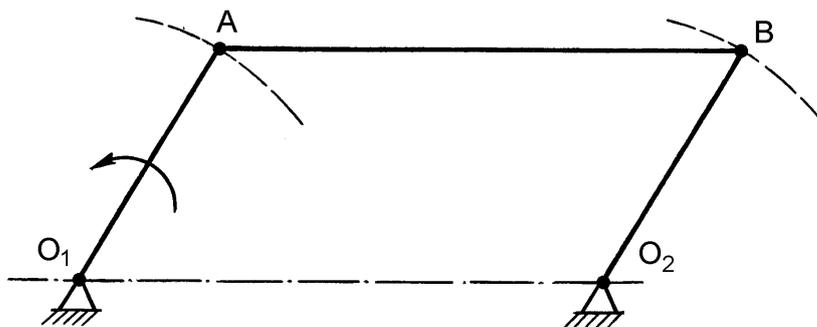


Рис. 2.10

Траєкторією точок тіла при поступальному русі можуть бути як пряма лінія, так і будь-

які криві. Термін “поступальний рух” застосовується тільки до тіла, але не до точки.

Теорема: При поступальному русі тіла всі його точки рухаються по тотожних конгруентних траєкторіях і мають у кожен момент часу однакові швидкості і прискорення.

Доведення: Нехай є тіло, яке рухається поступально і яке з одного положення перейшло в друге. Пряма AB , що проведена крізь довільні точки A і B тіла, зайняла положення $A'B'$. Виберемо за початок відліку будь-яку точку O . Проведемо з точки O , яку ми прийняли за початок відліку, радіуси – вектори \vec{r}_A, \vec{r}_B двох довільних точок тіла A і B (рис. 2.11). Із трикутника OAB випливає, що

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (2.33)$$

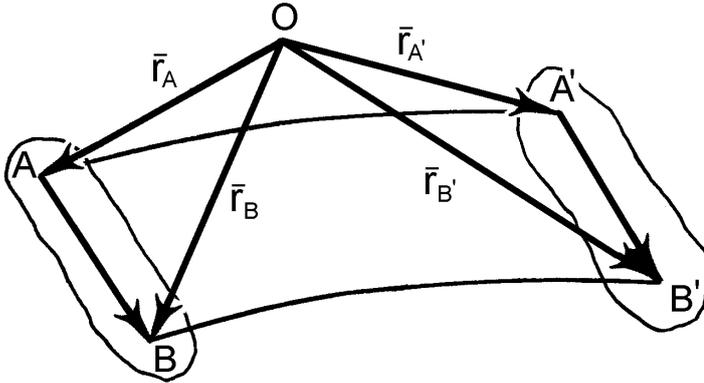


Рис. 2.11

Оскільки тіло рухається поступально, то вектор \overline{AB} , який з'єднує точки A і B та займає відносно тіла незмінне положення, буде переміщуватися паралельно самому собі, тобто є сталим вектором ($\overline{AB} = const$).

Таким чином, при поступальному русі тіла радіус – вектори довільних точок A і B , змінюючись, будуть відрізнятися на один і той же самий сталий вектор \overline{AB} .

Таким чином, матимемо:

$$\vec{r}'_B = \vec{r}'_A + \overline{A'B'} = \vec{r}'_A + \overline{AB}.$$

Отже, траєкторію руху точки B можна одержати, змістивши траєкторію точки A у напрямку вектора \overline{AB} на відстань AB , і тому ці траєкторії будуть тотожними, конгруентними (суміщаються при накладанні).

Визначимо швидкості точок тіла. Для цього продиференціюємо за часом вираз (2.33). Матимемо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt},$$

але, оскільки $\overline{AB} = const$, то $\frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$, отже

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt},$$

а це, як відомо, швидкості точок A і B , тобто:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B. \quad (2.34)$$

Після другого диференціювання за часом маємо:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}.$$

Похідна від швидкості за часом є прискоренням. Отже, остаточно одержуємо:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B. \quad (2.35)$$

Таким чином, поступальний рух тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї його точки.

Тобто, вивчення поступального руху тіла зводиться до вивчення руху однієї його точки. Швидкість і прискорення, які є загальними для всіх точок тіла, називаються швидкістю і прискоренням поступального руху тіла. Рівняння поступального руху тіла є рівнянням руху будь-якої точки тіла.

**Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.
Закон обертального руху**

Обертальним рухом називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки, які належать деякій прямій, незмінно зв'язані з тілом, і яка називається віссю обертання, залишаються нерухомими.

Всі інші точки тіла описують кола, площини яких перпендикулярні осі, а радіуси кіл (радіуси обертання) дорівнюють відстаням до осі. Центри кіл розташовані на осі обертання.

Щоб здійснити обертальний рух, необхідно закріпити нерухомо дві будь-які точки тіла, наприклад, у підшипниках, тоді пряма, яка проходить через ці точки, буде залишатися весь час нерухомою.

Визначимо положення обертального тіла.

Маємо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.12).

Проведемо через вісь обертання дві півплощини: нерухому півплощину I, та півплощину II, яка незмінно поєднана з тілом, тобто обертається разом з ним.

Тоді положення тіла у будь-який момент часу однозначно визначається двограним кутом φ між цими півплощинами, взятим з відповідним знаком, який називається кутом повороту тіла.

При обертанні тіла навколо нерухомої осі z кут повороту φ є неперервною і однозначною функцією від параметру часу

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.36)$$

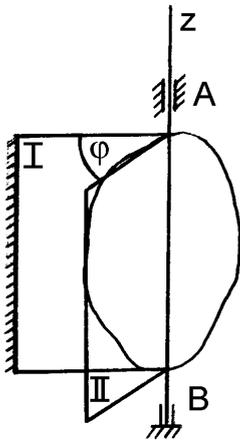


Рис. 2.12

Вираз (2.36) називається законом обертального руху тіла або кінематичним рівнянням обертального руху.

Якщо маємо цю функцію, то положення тіла буде повністю визначено, тобто кожному значенню параметра часу t маємо у відповідності лише єдину величину кута φ .

Кут $\varphi > 0$ відкладається від нерухомої площини у напрямку проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з додатнього кінця осі z .

Кут $\varphi < 0$ відкладається за годинниковою стрілкою.

Цей кут вимірюється у радіанах або обертах. Як відомо, один оберт дорівнює 2π [рад], а тому

$$\varphi = 2\pi N,$$

де N - кількість обертів тіла.

Кутова швидкість та кутове прискорення

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість ω характеризує зміну кута повороту тіла за одиницю часу.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то середня кутова швидкість тіла за цей проміжок часу буде чисельно дорівнювати:

$$\omega_{сер.} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Кутовою швидкістю тіла у будь-який момент часу t є границя, до якої наближається значення $\omega_{сер.}$, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.37)$$

Отже, кутова швидкість тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кута повороту за часом.

Знак ω визначає напрямок обертання тіла і, у свою чергу, визначається знаком кута повороту φ .

Одиниця виміру кутової швидкості $\left[\frac{рад}{с} \right], \left[\frac{1}{с} \right], \left[с^{-1} \right]$.

Кутове прискорення характеризує зміну кутової швидкості тіла з плином часу.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то середнє кутове прискорення тіла за цей проміжок часу буде чисельно дорівнювати:

$$\varepsilon_{сер.} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Кутовим прискоренням тіла у будь-який момент часу t є границя, до якої наближається $\varepsilon_{сер.}$, коли проміжок часу Δt прямує до нуля, тобто:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

або

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.38)$$

Отже, кутове прискорення тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом.

Одиниця виміру кутового прискорення $\left[\frac{рад}{с^2} \right], \left[\frac{1}{с^2} \right], \left[с^{-2} \right]$.

З вище наведеного випливає, що якщо модуль кутової швидкості з часом зростає ($\varepsilon > 0$), то обертання тіла буде прискореним, а якщо зменшується ($\varepsilon < 0$), то обертальний рух буде сповільненим.

Слід також зауважити, що обертання тіла навколо осі буде прискореним, якщо знаки перед кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε будуть однаковими, і навпаки – сповільненим, якщо знаки перед вказаними величинами будуть різними.

Частинні випадки обертання тіла навколо нерухомої осі

В залежності від того, які кінематичні характеристики має тіло при обертанні навколо нерухомої осі, бувають частинні випадки. Розглянемо їх.

1. Рівномірне обертання. Якщо кутова швидкість тіла залишається за весь час руху тіла сталою, то обертання називається рівномірним. При такому русі кутова швидкість $\omega = const$, а $\varepsilon = 0$. Кут повороту тіла можна визначати за такою формулою

$$\varphi = \omega \cdot t, \quad (2.39)$$

або кутова швидкість буде дорівнювати

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

У техніці швидкість рівномірного обертання тіл найчастіше визначають частотою обертання n , яка вимірюється у $\left[\frac{\text{об.}}{\text{хв.}} \right]$.

Встановимо зв'язок між вказаними кінематичними характеристиками. Так, відомо, що при одному оберті тіло повернеться на кут 2π , а при n обертах – на кут $2\pi n$. Тепер, якщо цей поворот (на кут $2\pi n$) відбувається за одну хвилину, або 60 [сек], то зв'язок між кутовою швидкістю ω обертання тіла і частотою n його обертання виражається такою залежністю

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1n.$$

2. Рівномірно змінний обертальний рух. При такому випадку обертання тіла навколо нерухомої осі його кутове прискорення $\varepsilon = \text{const}$, тобто кутова швидкість тіла ω за рівні проміжки часу змінюється на одну і ту ж величину.

Визначимо кінематичні характеристики рівномірно змінного обертального руху.

Оскільки $\varepsilon = \text{const}$, а згідно (2.38) $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, то звідси є можливість визначити кутову

швидкість руху тіла. Вона дорівнюватиме

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \quad (2.40)$$

Кутова швидкість ω знаходиться під знаком диференціала, а тому для її знаходження необхідно взяти інтеграли від лівої та правої частин виразу (2.40). Використовуємо для цього визначені інтеграли, для яких задаємо верхню та нижню границі зміни змінних величин. Матимемо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t,$$

або

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.41)$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість тіла.

Далі використаємо вираз (2.37), згідно якого $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Маємо можливість з нього

визначити кут φ . Він буде дорівнювати

$$d\varphi = \omega \cdot dt. \quad (2.42)$$

Замість ω підставимо у вираз (2.42) його значення (2.41). Матимемо

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \quad (2.43)$$

Як і у попередньому випадку, знайдемо кут повороту тіла φ , взявши визначені інтеграли від лівої і правої частин виразу (2.43). Також задаємо верхні та нижні границі зміни змінних величин. Матимемо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt. \quad (2.44)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

Остаточо матимемо:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.45)$$

де φ_0 - початковий кут повороту тіла.

Таким чином, при рівнозмінному обертальному русі твердого тіла його кутова швидкість ω та кут повороту φ визначаються за допомогою формул (2.41) та (2.45). Слід зауважити, що знаки у правих частинах цих формул (перед ε) показують характер рівнозмінного обертального руху. Так, якщо вони додатні, то рух є рівноприскореним, а якщо від'ємні, то рівносповільненим.

Приклад 2.5.

Привідний вал силосорізки починає обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon = 7,5$ [rad/c²]. Визначити кутову швидкість вала у кінці 15 секунди. Визначити також, скільки обертів зробить вал за ці 15 секунд.

Розв'язування.

За умовою прикладу кутове прискорення вала є стала додатна величина, а тому його обертальний рух буде рівноприскореним. Для визначення кутової швидкості ω і кута повороту φ вала можна скористатись виразами (2.41) і (2.45) відповідно, що використовують при розгляді рівноприскореного руху. А саме:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Слід відразу зауважити, що, оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то його початкова кутова швидкість і початковий кут повороту дорівнюють нулю:

$$\omega_0 = 0,$$

$$\varphi_0 = 0.$$

Підставимо далі у вираз для кутової швидкості значення кутового прискорення ε і часу $t_1 = 15$ [c]. Тоді кутова швидкість ω після п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t_1 = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{c}} \right].$$

Підставимо у вираз для кута повороту φ вала відомі величини, отримуємо його значення за п'ятнадцять секунд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ [rad]}.$$

Для знаходження загального числа обертів вала, скористаємось таким виразом

$$\varphi = N \cdot 2\pi.$$

Звідси число обертів N вала за 15 [c] дорівнює:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ [об.]}$$

Швидкості і прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Розглянемо тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.13). Виберемо в тілі будь-яку точку M , яка розміщується на відстані R від осі обертання z . При обертанні тіла точка M описує коло радіуса R , площина якого перпендикулярна осі обертання, а центр C розташований на самій осі.

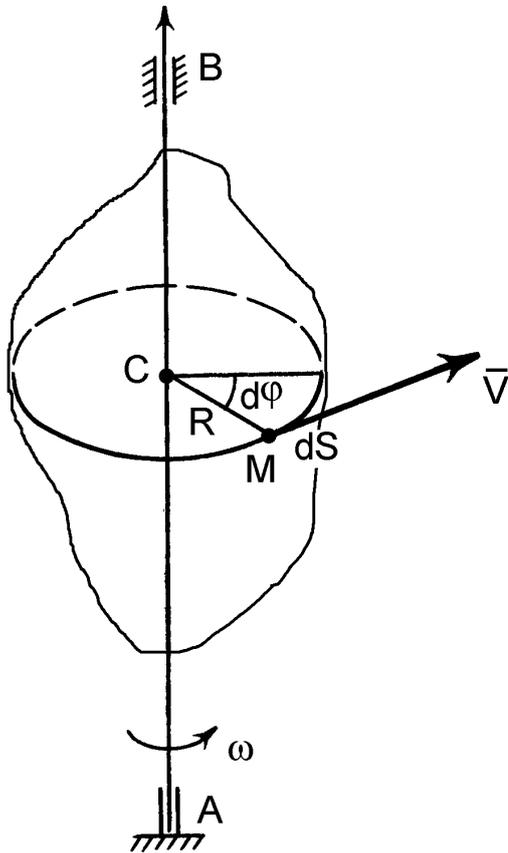


Рис. 2.13

За час dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, при цьому точка M здійснить уздовж своєї траєкторії переміщення на величину $dS = R d\varphi$. Визначимо швидкість точки M . За відомим виразом (2.22) вона буде дорівнювати

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R \cdot d\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

тобто

$$v = \omega \cdot R. \quad (2.46)$$

Ця швидкість носить назву лінійної або колової швидкості точки, що належить тілу, яке обертається навколо нерухомої осі.

Таким чином, лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання (відстань від цієї точки до осі обертання).

Напрямок вектора лінійної швидкості – по дотичній до кола, яке описується точкою M під час руху.

Оскільки для всіх точок тіла кутова швидкість ω у даний момент часу має одне і те ж саме значення, то лінійні швидкості точок обертального тіла пропорційні їх відстаням до осі обертання (рис. 2.14), і для діаметра KL буде мати місце еюра розподілу швидкостей точок, яка носить лінійний характер.

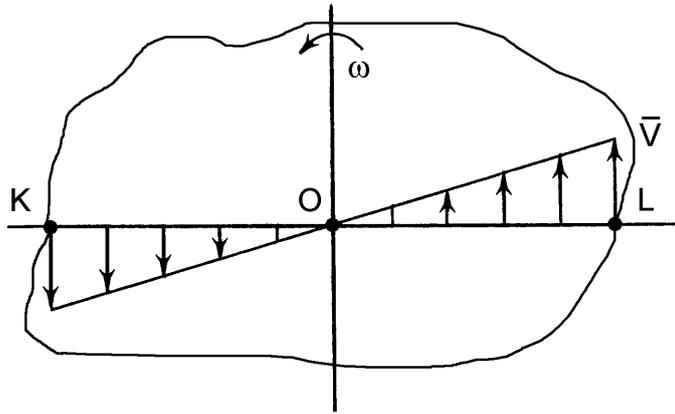


Рис. 2.14

Визначимо прискорення точки M , яка рухається вдовж криволінійної траєкторії. Для цього скористаємося рівняннями (2.32):

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n},$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

де

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

В даному випадку $\rho = R$, тоді, підставляючи значення (2.46), матимемо значення обертального, дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad (2.47)$$

та доцентрового, нормального прискорення

$$a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2. \quad (2.48)$$

Дотичне прискорення \bar{a}_τ завжди спрямоване по дотичній до траєкторії точки M , причому, якщо обертання прискорене, то у бік вектора швидкості, якщо сповільнене – то проти. Нормальне прискорення \bar{a}_n завжди додатне і спрямоване до центра свого кола.

Визначимо повне прискорення. Воно буде дорівнювати

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4} \quad (2.49)$$

або

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.50)$$

Визначимо напрямок вектора повного прискорення, для цього розглянемо рух матеріальної точки M по колу з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε , напрямки яких показані на рис. 2.15. Покажемо напрямки векторів дотичного \bar{a}_τ , нормального \bar{a}_n і повного \bar{a} прискорень. Тоді відхилення вектора повного прискорення \bar{a} від нормалі n до траєкторії руху точки визначається кутом μ , який може бути обчислений за таким виразом

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|R\varepsilon|}{R\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (2.51)$$

Оскільки ε і ω мають у даний момент часу для всього тіла одне і те ж саме значення, то з виразів для повного прискорення (2.50) та кута відхилення (2.51) випливає, що прискорення усіх точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі, пропорційні їх відстаням від осі обертання і утворюють однаковий кут μ з радіусами кіл, що описують різні точки тіла.

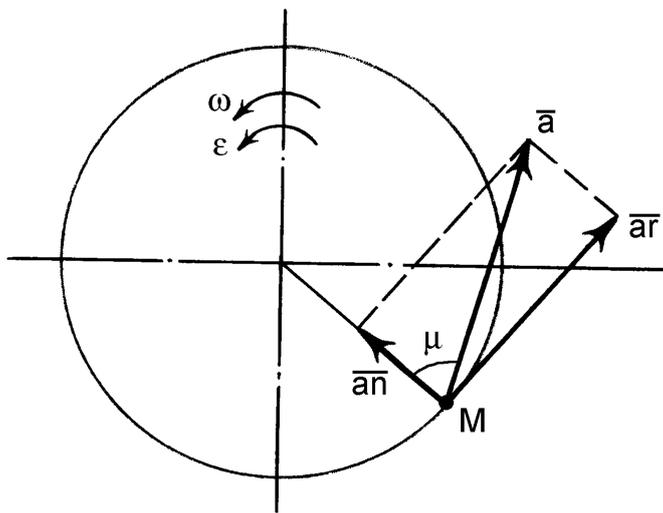


Рис. 2.15

Вектор кутової швидкості тіла

Кутову швидкість обертального тіла можна уявити як вектор.

Вважається, що вектор кутової швидкості тіла спрямований вздовж осі обертання так, що коли дивитись з його кінця, то можна бачити обертання тіла проти напрямку руху годинникової стрілки (рис. 2.16).

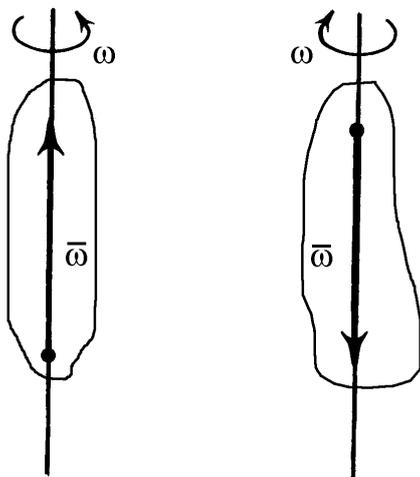


Рис. 2.16

Вектор $\vec{\omega}$ є вектором ковзним, тобто за його початок можна взяти будь-яку точку тіла, яка розташована на осі його обертання.

Задання вектора $\vec{\omega}$ повністю визначає обертальний рух тіла, напрям обертання, а також чисельне значення кутової швидкості за довжиною вектора і масштабним коефіцієнтом.

Векторний вираз лінійної швидкості точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Виразимо лінійну швидкість точки обертального тіла у вигляді векторного добутку.

Для цього відкладемо на осі обертання з будь-якої довільної точки O вектор $\vec{\omega}$ кутової швидкості і з цієї ж точки проведемо радіус – вектор \vec{r} , який визначає положення даної точки тіла (рис. 2.17).

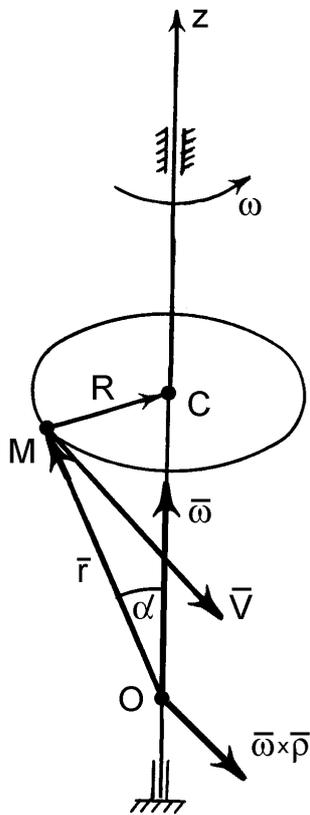


Рис. 2.17

З математики відомо, що векторним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} є вектор \vec{c} , модуль якого дорівнює добутку модулів векторів \vec{a} і \vec{b} на синус кута між ними, а спрямований цей вектор перпендикулярно до площини, в якій розташовані ці два вектори, у бік, звідки найкоротший перехід від вектора \vec{a} до вектора \vec{b} відбувається проти напрямку ходу годинникової стрілки, тобто $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. При цьому модуль векторного добутку буде дорівнювати

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Розглянемо випадок, що зображений на рис. 2.17, і визначимо модуль лінійної швидкості точки M . Матимемо

$$|\vec{v}| = \omega \cdot R = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha, \quad (2.52)$$

де \vec{r} - радіус вектор точки M відносно центра O ; α - кут між векторами $\vec{\omega}$ і \vec{r} .

Напрямок вектора \vec{v} лінійної швидкості буде по дотичній до кола або по перпендикуляру до площини трикутника OMC .

Далі визначимо модуль векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha. \quad (2.53)$$

Напрямок векторного добутку, як результуючого вектора, показаний на рис. 2.17, він також перпендикулярний площині $\triangle OMC$. Із цього можна зробити висновок, що не тільки співпадають модулі лінійної швидкості і векторного добутку, але збігаються і їх напрямки. Звідси

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.54)$$

Таким чином, лінійна швидкість будь-якої точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку двох векторів: кутової швидкості і радіус-вектора цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Визначимо лінійну швидкість точки M тіла, вісь обертання якого довільно розташована у просторі відносно декартової системи відліку $Oxyz$ (рис. 2.18). Координати точки M - x, y, z , проекції вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ - $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; проекції радіус-вектора \vec{r} - такі ж самі координати x, y, z .

Виразимо лінійну швидкість за допомогою визначника векторного добутку:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} +$$

$$+ (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}. \quad (2.55)$$

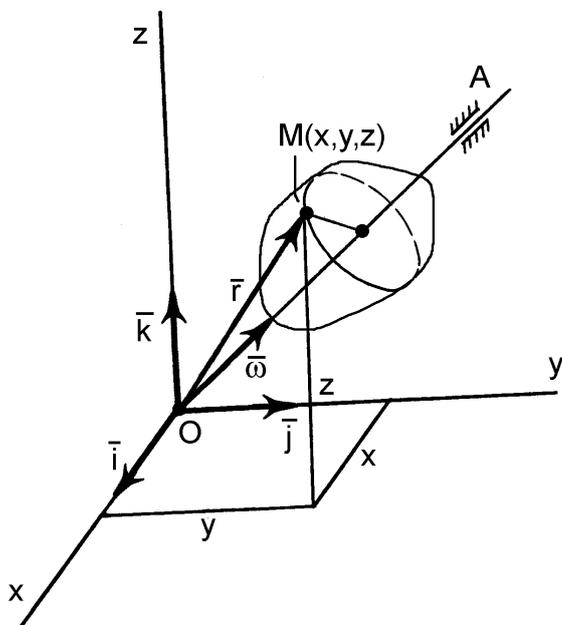


Рис. 2.18

Як відомо, вектор \vec{v} можна записати через його проєкції, тобто $\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$.

Тоді, по аналогії, проєкції лінійної швидкості на осі координат дорівнюють:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y,$$

$$v_y = \omega_z x - \omega_x z,$$

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x. \quad (2.56)$$

Формули (2.54), (2.56) одержані Ейлером в 1765р.

Для випадку на рис. 2.17:

$$\omega_x = 0,$$

$$\omega_y = 0,$$

$$\omega_z = \omega,$$

звідки, користуючись виразом (2.56), будемо мати:

$$v_x = -\omega y,$$

$$v_y = \omega x,$$

$$v_z = 0,$$

$$v = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R.$$

Приклад 2.6.

Обертання маховика двигуна у пусковий період визначається рівнянням $\varphi = \frac{t^3}{3}$, де t – в секундах, φ – в радіанах. Визначити модуль і напрям прискорення точки, яка розташована від осі обертання на відстані 50 [см], в момент, коли її швидкість дорівнює $v_1 = 8$ [м/с].

Розв'язування.

Для визначення прискорення руху матеріальної точки можна використати вираз (2.50):

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Кутові швидкість та прискорення руху маховика двигуна визначимо використавши вирази (2.37) і (2.38):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(\frac{t^3}{3}\right)}{dt} = t^2,$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t.$$

Визначимо момент часу, в який потрібно визначити прискорення точки. Для цього, на підставі виразу (2.46), визначимо кутову швидкість обертання маховика. Матимемо

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \quad [c^{-1}].$$

Оскільки визначена раніше кутова швидкість дорівнює $\omega = t^2$, то можемо визначити час t_1 . Матимемо

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4c.$$

У визначене вище кутове прискорення, яке дорівнює $\varepsilon = 2t$, підставимо значення часу t_1 , отримуємо його значення

$$\varepsilon_1 = 2t_1 = 2 \cdot 4 = 8 \quad [c^{-2}].$$

Підставимо остаточно значення ω_1 і ε_1 у вираз для повного прискорення, матимемо

$$a = 0,5\sqrt{8^2 + 16^4} = 128,0 \quad [м/с^2].$$

Напрямок вектора \bar{a} визначимо згідно виразу (2.51). Матимемо

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32},$$

звідки

$$\mu = 1^{\circ}48',$$

де μ - кут між радіусом обертання і вектором прискорення \bar{a} .

Векторний	вираз	нормального
і тангенціального прискорень		

Для отримання векторних формул нормального і тангенціального прискорень візьмемо похідну по часу від виразу (2.6), підставляючи в нього вираз (2.54). Матимемо

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.57)$$

Аналізуючи вираз (2.57) і розглядаючи рис.2.19, можна записати, що

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon} \quad \text{– вектор кутового прискорення, який спрямовується аналогічно вектору}$$

кутової швидкості, а

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ – вектор лінійної швидкості.}$$

Підставимо ці значення у вираз (2.57), отримаємо

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.58)$$

Вираз (2.58) називають формулою Ривальса.

Проведемо аналіз виразу (2.58).

Модуль першого векторного добутку буде дорівнювати

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \alpha.$$

Модуль тангенціального прискорення буде дорівнювати:

$$a_\tau = \varepsilon R = \varepsilon r \sin \alpha.$$

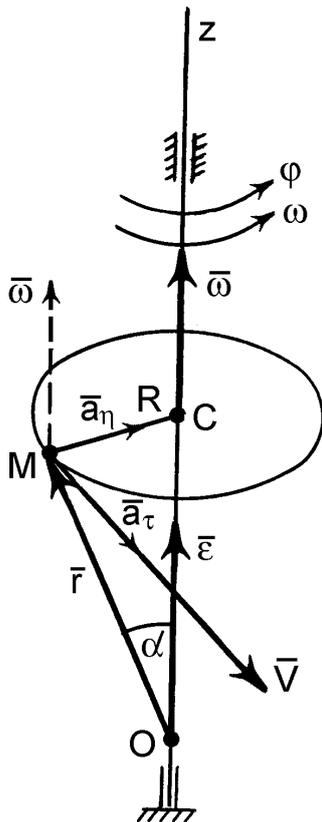


Рис. 2.19

Як бачимо з останніх виразів співпадають не тільки їх модулі, але і напрямки ($\perp \Delta OMC$), тому

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (2.59)$$

Тангенціальне прискорення точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутового прискорення на радіус-вектор цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Модуль нормального прискорення (2.48) буде дорівнювати

$$a_n = \omega^2 R = \omega v.$$

Модуль векторного добутку $|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = \omega v$, оскільки $(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = 90^\circ$ і $\vec{v} \perp \vec{\omega}$.

Співставляючи значення модулів векторів \vec{a}_n , $\vec{\omega} \times \vec{v}$ і їхні напрямки, можна зробити висновок, що

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.60)$$

Нормальне прискорення точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості на вектор лінійної швидкості цієї

точки.

Передача обертального руху

Передача обертального руху здійснюється за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових передач, коліс тертя та т. ін.

Розглянемо передачу обертального руху за допомогою зубчастої передачі (або фрикційної передачі) (рис. 2.20), яка складається з двох коліс, що обертаються навколо нерухомих осей. Назвемо перше колесо (меншого діаметра) ведучим. Напрямок його обертання показано стрілкою. Воно має такі фізичні та кінематичні параметри: радіус – r_1 , кількість зубів – z_1 , кутова швидкість – ω_1 або частота обертання – n_1 . Для другого колеса, яке є веденим, будуть такі параметри: радіус – r_2 , кількість зубів – z_2 , кутова швидкість – ω_2 або частота обертання – n_2 . Напрямок обертання другого колеса також показано стрілкою.

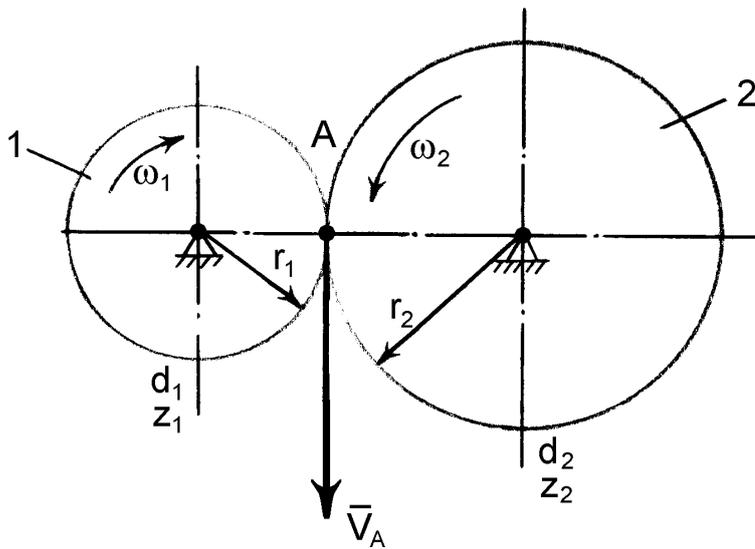


Рис. 2.20

Тепер, якщо передача обертального руху здійснюється без проковзування у місці контакту коліс, то лінійна швидкість точки контакту (точка A), яка належить одночасно двом колесам, повинна бути однаковою. Знайдемо лінійні швидкості точки A спочатку для першого колеса, а потім для другого колеса і прирівняємо їх. Лінійна швидкість точки A для першого колеса буде дорівнювати:

$$v_A = \omega_1 \cdot r_1, \quad (2.60)$$

а лінійна швидкість точки A для другого колеса буде дорівнювати:

$$v_A = \omega_2 \cdot r_2. \quad (2.61)$$

Прирівняємо вирази (2.60) та (2.61), будемо мати:

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \quad (2.62)$$

Перетворимо вираз (2.62) таким чином:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (2.63)$$

Якщо вважати, що передаточне відношення, це $\frac{\omega_1}{\omega_2} = u$, то можна остаточно написати:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.64)$$

Таким чином, *передаточне відношення, це відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса, яке дорівнює відношенню радіуса (або числа зубів) веденого колеса до радіуса ведучого колеса.*

У техніці є таке поняття, як передаточне число.

Передаточне число – це відношення кутових швидкостей валів у напрямку

енергетичного потоку, тобто від двигунів до виконавчих механізмів.

Вказані основні положення про передачу обертального руху між двома колесами повністю придатні для визначення передаточного відношення для пасової або ланцюгової передач. На рис. 2.21 показана схема пасової (ланцюгової) передачі із вказівкою фізичних та кінематичних параметрів. Для визначення передаточного відношення цієї передачі необхідно використати вираз (2.64).

Передаточне відношення може бути більшим від одиниці або меншим.

Якщо передача обертального руху здійснюється за допомогою, так званої, черв'ячної передачі (рис. 2.22), то передаточне відношення визначається формулою:

$$u = \frac{z_k}{h} \quad (2.65)$$

де z_k - число зубців черв'ячного колеса, h - число заходів черв'яка.

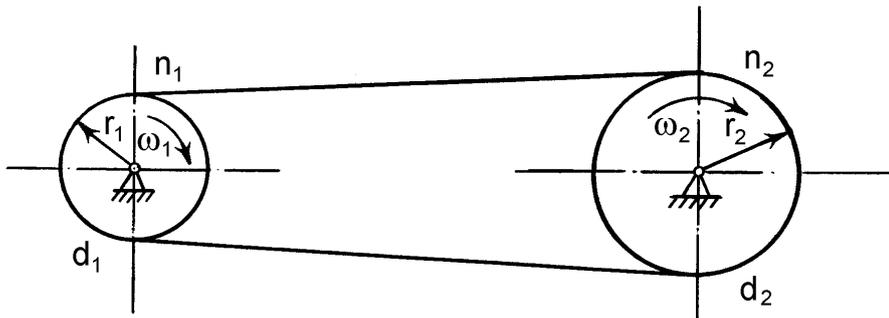


Рис. 2.21

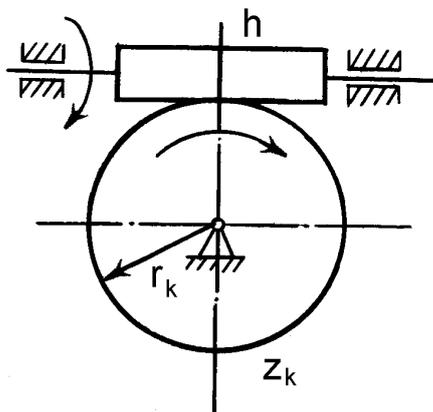


Рис. 2.22

Визначення плоскопаралельного руху

Плоским або плоскопаралельним називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій заданій нерухомій площині.

На рис. 2.23 призма при русі займає послідовно три положення.

Перехід із положення I у положення II призма здійснює у поступальному русі, перехід у положення III – у плоскому русі, оскільки, наприклад, пряма AB переходить у пряму $A'B'$, які є непаралельними.

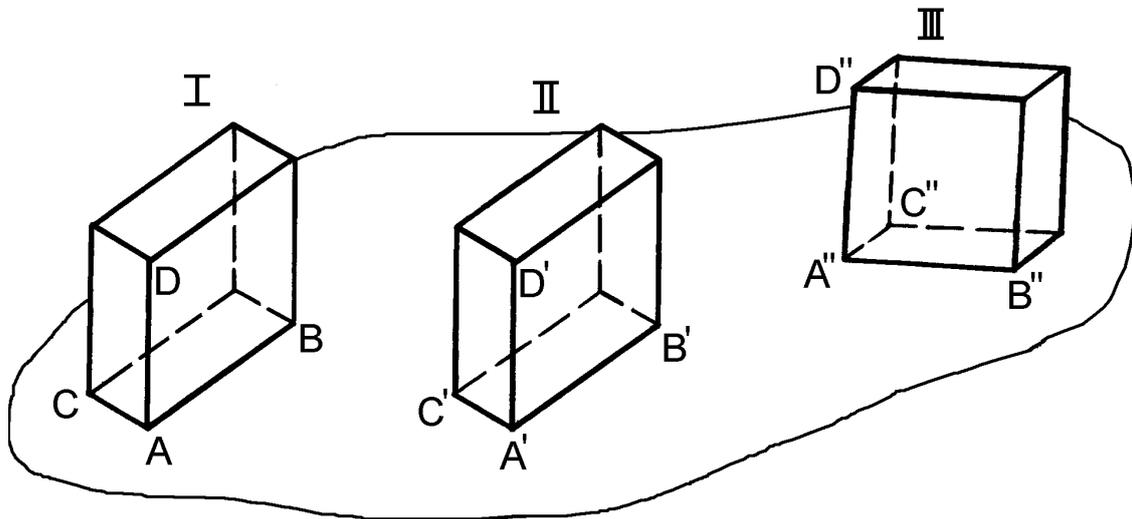


Рис. 2.23

Розглянемо тверде тіло, яке здійснює плоский рух, паралельний деякій нерухомій площині Π (рис. 2.24).

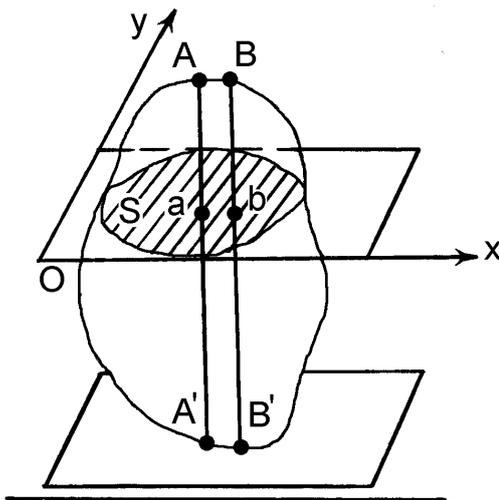


Рис. 2.24

Якщо ми перетнемо тіло площиною Oxy , яка паралельна нерухомій площині Π , тоді у перерізі дістанемо плоску фігуру S . При русі тіла ця фігура буде переміщуватися, залишаючись весь час у площині Oxy . Очевидно, що при плоскому русі всі точки перпендикуляра AA' до площини фігури рухаються однаково, як і точка “ a ”, маючи однакові швидкості і прискорення, тому що цей перпендикуляр рухається поступально. Якщо взяти на перерізі другу точку “ b ” і провести перпендикуляр BB' , то всі його точки будуть мати однакові швидкості і прискорення, але $\bar{v}_A \neq \bar{v}_B$ і $\bar{a}_a \neq \bar{a}_b$. Якщо на перерізі взяти будь-яку кількість точок, то можна охопити все тіло разом. Таким чином, рух перерізу S може повністю репрезентувати плоскопаралельний рух всього тіла.

Звідсіля випливає, що для визначення плоского руху тіла достатньо знати рух плоскої фігури S , одержаної перерізом тіла площиною, яка паралельна даній нерухомій площині.

Миттєвий центр швидкостей.

Плани швидкостей та прискорень

Миттєвим центром швидкостей, називається точка P рухомої плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Вказана точка може бути розташованою або на самій рухомій фігурі, або на її уявному

продовженні.

Розглянемо фігуру S , яка здійснює плоский рух (рис. 2.30). Швидкість деякої точки A цієї фігури вважається відомою і дорівнює \bar{v}_A , напрям обертання та кутова швидкість ω обертання фігури теж вважаються відомими і показані на рис. 2.30.

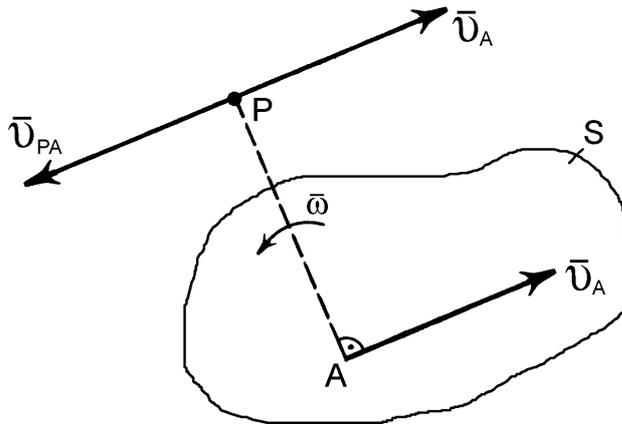


Рис. 2.30

Зробимо далі таку побудову: опустимо з точки A перпендикуляр до вектора швидкості \bar{v}_A , який напрямлений у бік обертання фігури. Відкладемо на цьому перпендикулярі відрізок довжиною $AP = \frac{v_A}{\omega}$. Прийнемо точку A за полюс, тоді швидкість точки P даної фігури буде визначатись за допомогою такого векторного рівняння:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}.$$

З цього виразу знайдемо швидкість \bar{v}_{PA} . Вона буде дорівнювати:

$$|\bar{v}_{PA}| = \omega \cdot AP = \omega \frac{|\bar{v}_A|}{\omega} = |\bar{v}_A|.$$

Вектор швидкості \bar{v}_{PA} буде напрямлений протилежно вектору швидкості \bar{v}_A , тобто

$$\bar{v}_{PA} = -\bar{v}_A.$$

Тоді, підставляючи це значення швидкості \bar{v}_{PA} у вираз для швидкості точки P , остаточно будемо мати:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A - \bar{v}_A = 0.$$

Таким чином, швидкість точки P дорівнює нулю, і тим самим доведено існування миттєвого центру швидкостей.

Способи	визначення	положення
миттєвого центру швидкостей		

Розглянемо декілька окремих випадків визначення положення миттєвого центру швидкостей. При цьому можуть бути такі випадки (рис. 2.31):

1. Миттєвий центр швидкостей фігури розташований на перпендикулярі, який проведено до напрямку вектора швидкості деякої точки фігури (рис. 2.31, а).

2. Миттєвий центр швидкостей фігури може бути знайдено як точку перетину двох перпендикулярів, які поставлені з двох точок фігури до напрямків векторів швидкостей цих точок (рис. 2.31, б).

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні (рис. 2.31, в), а самі точки не лежать на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей, то обертання в цей момент відсутнє, і фігура здійснює в даний момент поступальний рух, а швидкості усіх точок фігури дорівнюють одна одній.

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

Додамо, що в цьому випадку, на відміну від поступального руху, прискорення точок будуть різні.

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні (рис. 2.31, з), точки лежать на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей, а модулі швидкостей не однакові, то миттєвий центр швидкостей міститься у точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

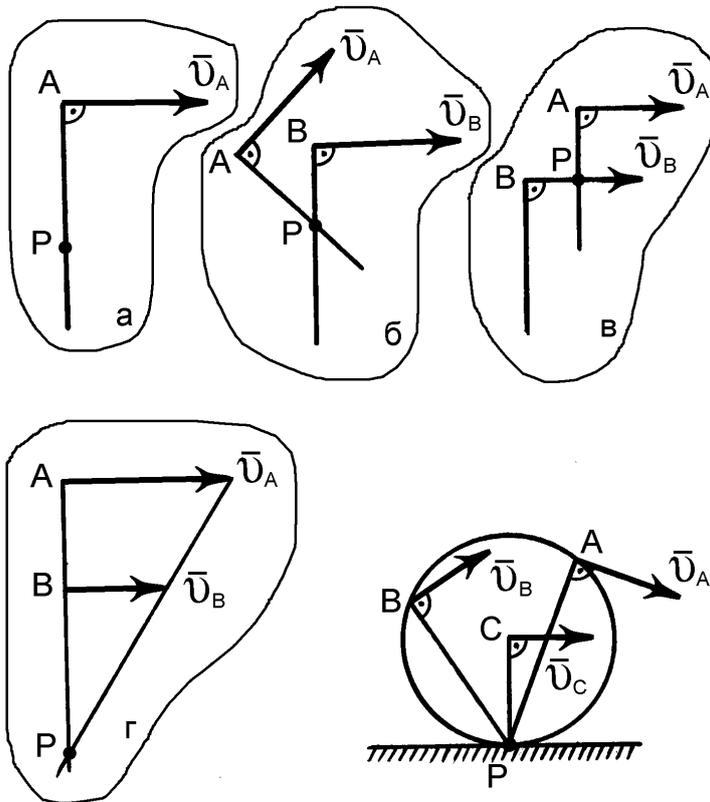


Рис. 2.31

Тоді, як бачимо з (рис. 2.31, з), матимемо:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B}.$$

5. При коченні фігури без ковзання по деякій нерухомій кривій миттєвим центром швидкостей буде точка дотику фігури з цією нерухомою кривою (рис. 2.31, д).

6. Кутова швидкість фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури до відстані від цієї точки до миттєвого центру швидкостей.

Лекція 10.

Тема: Основні поняття динаміки

Динамікою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних тіл під дією сил. В цьому найбільш важливому розділі теоретичної механіки викладаються загальні методи дослідження механічного руху будь-яких матеріальних об'єктів, які можуть бути описані за допомогою моделей: матеріальна точка, система матеріальних точок, абсолютно тверде тіло. Крім того, в динаміці вивчаються стійкість рівноваги і руху матеріальних об'єктів і їх механічні коливання, рух матеріальних об'єктів змінної маси (ракетна динаміка), елементи теорії удару.

Динаміка має важливе прикладне значення. За допомогою її рівнянь і методів визначаються закони руху різних матеріальних тіл - снарядів, ракет, супутників, планет, елементів вимірювальних приладів, будівельних механізмів, будівельних конструкцій, промислового устаткування, турбоагрегатів тощо. На основі її законів створені складні гіроскопічні прилади керування, на базі яких здійснюється динамічна або інерційна навігація.

Методи дослідження стійкості руху є фундаментом динаміки систем автоматичного регулювання. Методи і варіаційні принципи аналітичної динаміки після відповідного узагальнення використовують для дослідження динаміки електричних ланцюгів, у задачах електродинаміки, квантової механіки, термодинаміки та інших наук.

В основі динаміки лежать закони Ньютона, які є постулатами або аксіомами, на яких будується вся система висновків, доказів і методів динаміки. Ці закони є об'єктивними законами природи, бо встановлені на основі чисельних дослідів і спостережень Ньютона і його попередників, достовірність яких перевірена дослідом і практикою.

Динаміка спирається на поняття, теореми, методи і результати двох попередніх розділів - статички (визначення і перетворення систем сил, у тому числі реакцій в'язей) і кінематики (способи завдання руху, співвідношення між координатами, швидкостями і прискореннями, кінематичний аналіз механізмів). Проте динаміка не є простим синтезом двох попередніх розділів. Її *основним змістом* є складання (за допомогою понять статички і кінематики) диференціальних рівнянь руху і їх розв'язання математичними методами з метою визначення законів руху матеріальних тіл, а також встановлення загальних законів і принципів динаміки, які визначають механічний рух. При цьому в динаміці вводиться ряд важливих понять: маса, центр мас, момент інерції, кількість руху, кінетична і потенційна енергії, робота, потужність, сила інерції, можливе переміщення та ін.

Необхідною умовою розв'язання задач динаміки є знання апарату вищої математики, зокрема таких її розділів як диференціальні рівняння у звичайних і частинних похідних, похідні функцій одній і кількох змінних, криволінійні і кратні інтеграли та ін.

Динаміка і її основні задачі

Два попередні розділи курсу механіки – статика і кінематика – по суті мало зв'язані між собою. Кожному з них відповідає своє окреме коло понять, задач і методів їх розв'язання. У статисти розглядаються задачі на рівновагу, а також задачі еквівалентних перетворень систем сил; при таких перетвореннях навіть не постає питання про те, який рух тіла викликають прикладені сили. У кінематиці вивчається рух «сам по собі» без зв'язку з тими силами, під дією яких він відбувається.

Динаміка - це основний розділ теоретичної механіки, де узагальнюються положення і висновки, отримані в статисти і кінематиці; тобто динаміка вивчає механічний рух матеріальних об'єктів, що виникає під дією сил, прикладених до цих об'єктів.

Саме у динаміці ставляться і розв'язуються дві основні задачі механіки: а) за відомим законом руху матеріального об'єкта потрібно визначити сили, які цей рух викликають (перша або пряма задача); б) за відомими силами, що діють на матеріальний об'єкт, потрібно знайти закон його руху (друга або обернена задача).

Звичайно динаміку в залежності від конкретного поняття матеріального об'єкта поділяють на три частини: динаміку матеріальної точки, динаміку системи матеріальних точок і динаміку твердого тіла.

Динаміка матеріальної точки

Фундаментом класичної динаміки є другий закон Ньютона, який називають основним законом динаміки. Нагадаємо, що математична форма запису цього закону для матеріальної точки дається рівнянням:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F},$$

де: m - маса точки; \vec{v} - швидкість точки; \vec{F} - рівнодіюча всіх сил, прикладених до точки.

В тих випадках, коли можна прийняти умову про сталість маси, основне диференціальне рівняння динаміки точки набуває вигляду:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \text{ або } m\vec{W} = \vec{F} \quad (1.1)$$

(\bar{W} - абсолютне прискорення точки).

3.2.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Як відомо, положення матеріальної точки в інерціальній системі відліку визначається її радіусом-вектором \vec{r} . Сила \vec{F} , що діє на точку, може залежати від положення точки, тобто від радіуса-вектора \vec{r} (наприклад, сила тяжіння), швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ точки (наприклад, сила опору) і часу t . Отже, в загальному випадку основне диференціальне рівняння (1.1) можна записати в такій формі:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (1.2)$$

Це рівняння називається *диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі*.

Диференціальне рівняння у векторній формі еквівалентне певній системі скалярних (алгебраїчних) рівнянь. В залежності від вибору координатних осей, на які проектується основне рівняння динаміки (1.1), отримують різні форми скалярних диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

Так, якщо спроектувати рівняння (1.2) на координатні осі x, y, z декартової нерухомої системи координат, то будемо мати:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x(x, v_x, t); \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y(y, v_y, t); \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z(z, v_z, t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

У спрощеній формі запису ця система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x; \\ m\ddot{y} &= F_y; \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

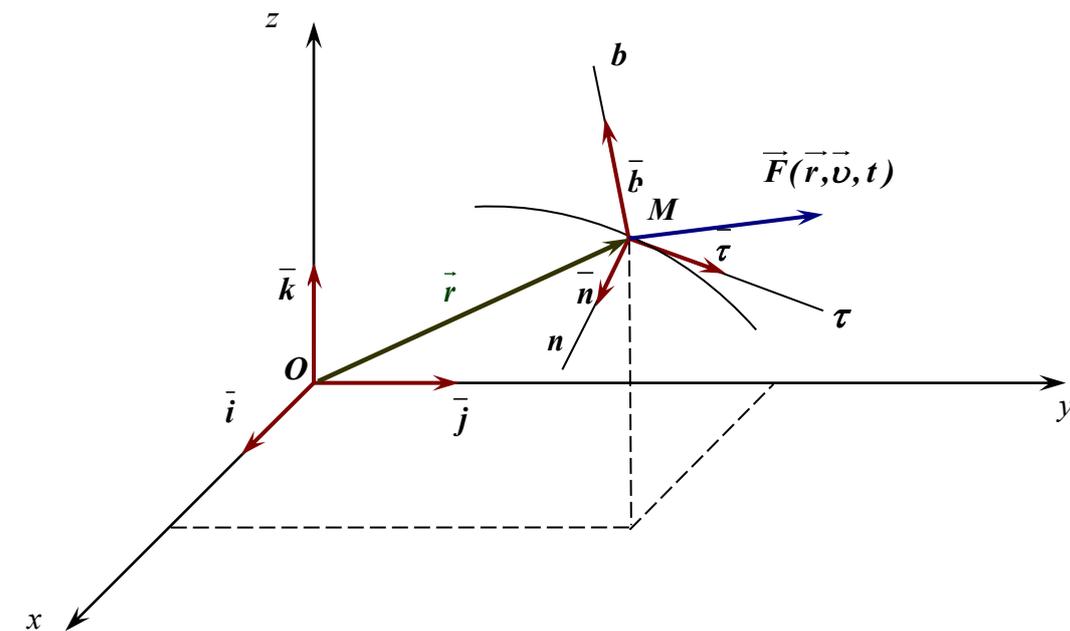


Рис.1.1

При використовуванні природної системи координат для опису руху матеріальної точки потрібно спроектувати основне диференціальне рівняння динаміки (1.2) на осі природного тригранника (рис.1.1); в результаті отримаємо співвідношення:

$$mW_{\tau} = F_{\tau}, \quad mW_n = F_n, \quad mW_b = F_b, \quad (1.5)$$

де F_{τ}, F_n, F_b - проекції рівнодіючої сил на дотичну, головну нормаль і бінормаль.

Якщо згадати відомі з кінематики вирази для проекцій W_{τ}, W_n, W_b повного прискорення точки на ті ж напрями, то отримаємо:

$$\text{або} \quad \left. \begin{aligned} m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_{\tau}, \quad \frac{m}{\rho} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = F_n, \quad 0 = F_b, \\ m \frac{dv_{\tau}}{dt} = F_{\tau}, \quad m \frac{v_{\tau}^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

В цих рівняннях S - дугова координата (закон руху точки вздовж траєкторії); ρ - радіус кривизни в поточній точці траєкторії.

Основний закон динаміки і, відповідно, його математичні вирази, наведені вище, сформульовані для вільної матеріальної точки. Якщо на точку накладено певні в'язі, тобто вона є невільною, то на підставі принципу звільнення від в'язей до заданих (активних) сил, що діють на точку, потрібно додати відповідні сили реакції і розглядати матеріальну точку як вільну. Тоді основне рівняння динаміки буде мати вигляд:

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (1.7)$$

а алгебраїчні диференціальні рівняння руху точки в проекціях на осі декартової системи координат і на осі природного тригранника наберуть такої форми:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (1.8)$$

і

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\tau} + R_{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b \quad (1.9)$$

В цих рівняннях \vec{R} - рівнодіюча реакцій в'язей; $R_x, R_y, R_z, R_{\tau}, R_n, R_b$ - складові реакцій в'язей.

Дві задачі динаміки матеріальної точки

За допомогою диференціальних рівнянь руху матеріальної точки розв'язують дві основні задачі динаміки, про які згадувалось у пункті 1.1. Розглянемо алгоритми (методику) розв'язання цих задач.

Перша (пряма) задача динаміки точки

В задачах цієї категорії задані закон руху точки і її маса. Потрібно знайти рівнодіючу сил, яка обумовлює заданий рух. Методика розв'язання полягає у наступному: закон руху підставляють в диференціальне рівняння (1.4) або в (1.6) (в залежності від способу завдання руху) і диференціюванням функцій, якими задано закон руху, визначають проекції шуканої рівнодіючої сил.

Приклад 1

Матеріальна точка масою m рухається в площині xOy згідно з законом $x = at, \quad y = bt - ct^2$. Знайти силу, під дією якої відбувається цей рух.

В даному випадку рух задано в декартових координатах. Тому для розв'язання використовуємо систему рівнянь (1.4). Знаходимо:

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{і} \quad F_x = 0, \quad \ddot{y} = -2C \quad \text{і} \quad F_y = -2mC.$$

Таким чином, з'ясуємо, що на точку діє стала сила, паралельна осі y і протилежна їй за напрямом.

Приклад 2

Матеріальна точка маси m рухається по колу радіуса r згідно з законом $S = at + b$. Визначити силу, під дією якої відбувається такий рух. Закон задано в натуральній формі, тому для розв'язання задачі використовуємо диференціальне рівняння (1.6). Знаходимо:

$$\frac{dS}{dt} = v = a ; \frac{d^2S}{dt^2} = W_\tau = 0. \text{ Тому } F_\tau = 0 \text{ і } F_n = \frac{ma^2}{r}.$$

Приходимо до висновку, що заданий рух матеріальної точки відбувається під дією сили, сталою за величиною і напрямленою за радіусом кола до його центра.

Друга (обернена) задача динаміки точки

В задачах такого типу відомі сили, які діють на матеріальну точку, її маса і початкові умови. Останні визначають положення точки і її швидкість в певний момент часу, прийнятий за початковий. Потрібно знайти кінематичні характеристики руху точки (закон руху, швидкість і інколи прискорення).

Розв'язання другої задачі зводиться до інтегрування систем диференціальних рівнянь (1.4) або (1.6) при заданих початкових умовах.

Розглянемо більш детально особливості розв'язання другої задачі динаміки точки при умові її прямолінійного руху. Причому координатну вісь x у всіх випадках будемо суміщати з напрямом прямої, вздовж якої відбувається рух. Тоді вектор сили \vec{F} , що діє на точку, повністю визначається його єдиною проекцією F_x .

Виділимо з усієї різноманітності сил такі, що є: а) сталими, б) залежними тільки від часу, в) залежними від положення (координати) точки, г) залежними тільки від швидкості точки.

а. Прямолінійний рух точки під дією сталої сили \vec{F} .

Диференціальне рівняння в цьому випадку має вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x = const$$

звідкіля:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{m} \text{ і } dv_x = \frac{F_x}{m} dt .$$

Після інтегрування отримаємо:

$$v_x = \frac{F_x}{m} t + c_1 .$$

Після другого інтегрування з урахуванням того, що $v_x = \frac{dx}{dt}$, будемо мати:

$$x = \frac{F_x}{2m} t^2 + c_1 t + c_2 .$$

б. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить тільки від часу.

Вихідне диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} = F_x(t)$$

З нього виходить:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(t)}{m} \text{ і } dv_x = \frac{1}{m} F_x(t) dt .$$

Після інтегрування отримаємо:

$$v_x = \frac{1}{m} \int F_x(t) dt + c_1 ,$$

а після повторного інтегрування отримаємо:

$$x = \frac{1}{m} \int \left(\int F_x(t) dt \right) dt + c_1 t + c_2 .$$

в. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить тільки від положення точки.

Якщо урахувати, що :

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx \cdot dx}{dt \cdot dx} = v_x \frac{dv_x}{dx}, \quad (1.10)$$

то вихідне диференціальне рівняння руху записується у такій формі:

$$v_x \cdot dv_x = \frac{1}{m} F_x(x) dx.$$

Після інтегрування знайдемо:

$$v_x^2 = \frac{2}{m} \int F_x(x) dx + c_1,$$

звідки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int F_x dx + c_1} \quad \text{і} \quad dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int F_x \cdot dx + c_1}}.$$

Повторне інтегрування дає:

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int F_x(x) dx + c_1}} + c_2.$$

Тобто $t = \Phi(x, c_1, c_2)$.

Розв'яжемо останнє рівняння відносно x і знайдемо закон руху точки в залежності від часу t .

2. Прямолінійний рух точки під дією сили, яка залежить тільки від швидкості цієї точки.

При розв'язанні задачі виникають два варіанти.

Перший варіант. Умова задачі дозволяє визначити швидкість як функцію часу.

Тоді $m\ddot{x} = F_x(v_x)$ або $m \frac{dv_x}{dt} = F_x(v_x)$ і $\frac{dv}{F_x(v_x)} = \frac{1}{m} dt$. Після інтегрування

отримуємо:

$$t = m \left(\int \frac{dv_x}{F_x(v_x)} + c_1 \right).$$

Якщо з останнього рівняння можна визначити швидкість як функцію від часу, тобто:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \varphi(t),$$

то після інтегрування цього виразу маємо:

$$x = \int \varphi(t) dt + c_2.$$

Другий варіант. При неможливості визначити швидкість як функцію часу, запишемо вихідне диференціальне рівняння у такій формі (дивись пункт «в»):

$$m v_x \frac{dv_x}{dx} = F_x(v_x).$$

Тоді $m \frac{v_x dv_x}{F_x(v_x)} = dx$ і $x = m \int \frac{v_x dv_x}{F_x(v_x)} + c_2$.

З останнього співвідношення визначаємо: $v_x = \frac{dx}{dt} = \varphi(x, c_2)$. Інтегруємо і отримуємо:

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, c_2)} + c_3,$$

звідки визначаємо x як функцію від t .

Питання для самоконтролю

1. Які закони Ньютона лежать в основі динаміки?

2. Наведіть приклади сил, що діють на матеріальну точку, які є: а) сталими; б) залежними від часу; в) залежними від швидкості; г) залежними від положення цієї точки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на осі нерухомої декартової системи координат і на осі природного тригранника.
4. Яка різниця між диференціальним рівнянням руху вільної і невільної матеріальної точки?
5. У чому полягає суть прямої та оберненої задачі динаміки?
6. Як визначаються сталі інтегрування при розв'язанні диференціальних рівнянь руху точки?

Лекція 11.

Тема: Рух матеріальної точки. Принцип д'Аламбера

Моделювання реального тіла як матеріальної точки має певні обмеження (це ті випадки, коли розмірами тіл згідно з умовою задачі можна знехтувати). Проте часто реальний об'єкт необхідно розглядати в якості механічної системи, тобто сукупності матеріальних точок або тіл, в якій положення і рух кожної точки (тіла) залежить від положення і руху всіх інших. Ця залежність обумовлена силовою взаємодією між окремими елементами механічної системи.

В курсі статички ми поділяли всі сили, прикладені до твердого тіла чи системи тіл, на активні і реакції в'язей, розуміючи під першими сили, що не залежать від в'язей. Там же було показано, що сили можна також поділити на зовнішні і внутрішні.

Нагадаємо ще раз визначення зовнішніх і внутрішніх сил. Зовнішніми називають сили, які є результатом дії на точки (тіла) даної механічної системи з боку тіл, що не входять до складу цієї системи. Сили взаємодії між матеріальними точками чи тілами системи називають внутрішніми. Позначаються зовнішні сили верхнім індексом "e", а внутрішні – верхнім індексом "i" (від початкових літер французьких слів *exerieur* – зовнішній і *interieur* – внутрішній):

\vec{F}^e - зовнішня сила, \vec{F}^i - внутрішня сила.

Властивості внутрішніх сил виходять з третього закону Ньютона і зводяться до наступного:

Геометричні суми всіх внутрішніх сил механічної системи і їх моментів відносно довільного центра простору дорівнюють нулю при будь-якому стані системи. Тобто:

$$\sum_1^n \vec{F}_k^i = 0, \quad \sum_1^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = \sum_1^n \vec{M}_0(\vec{F}_k^i) = 0. \quad (1.1)$$

Рівність нулю головного вектора і головного момента внутрішніх сил зовсім не означає, що ці сили зрівноважені. Слід пам'ятати, що внутрішні сили прикладені до різних тіл даної матеріальної системи, які в загальному випадку можуть переміщуватись одне відносно другого. Прикладом може бути Сонячна система, планети якої і їх супутники здійснюють складні рухи під дією тільки внутрішніх сил.

3.3.2. Маса і центр мас системи

Механічна система як об'єкт дослідження характеризується своєю масою і центром мас.

Масою системи, що складається з «n» матеріальних точок, називається величина M, яка дорівнює сумі мас усіх точок:

$$M = \sum_1^n m_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.2)$$

Центром мас (центром інерції) матеріальної системи називається геометрична точка C, радіус-вектор \vec{r}_c якої визначається рівнянням:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_1^n m_k \cdot \vec{r}_k}{M}, \quad (1.3)$$

де: \vec{r}_k - радіус-вектор k-ї точки; m_k - маса цієї точки.

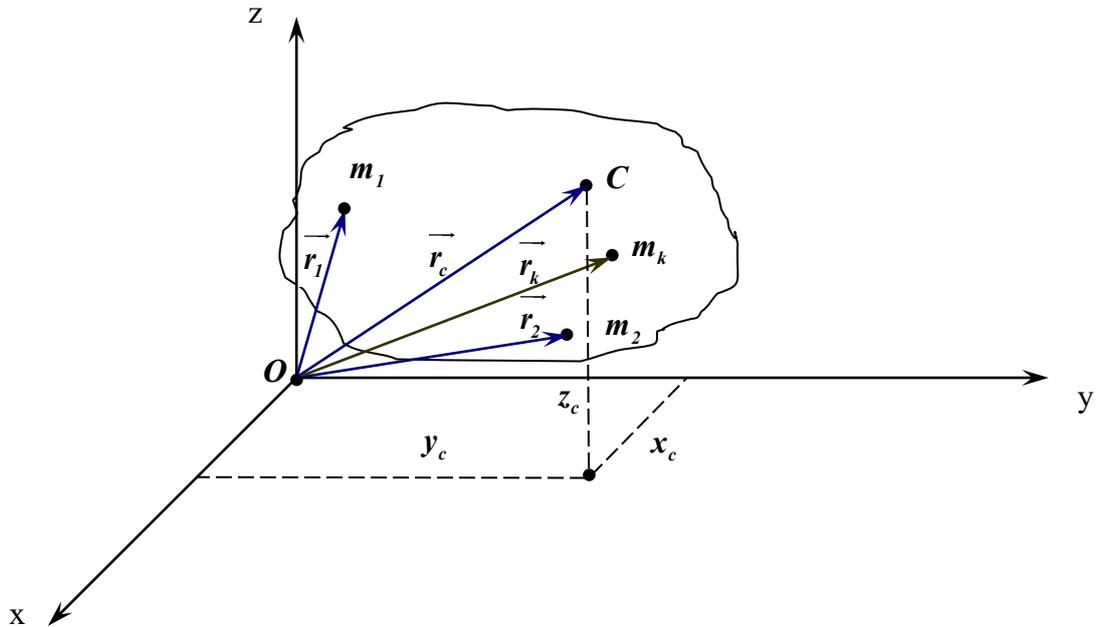


Рис.1.1

Координати центра мас в декартовій системі відліку дорівнюють (рис.1.1):

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k \cdot x_k}{M}; \\
 y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k \cdot y_k}{M}; \\
 z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k \cdot z_k}{M}.
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

В цих формулах x_k, y_k, z_k - координати k -ї точки.

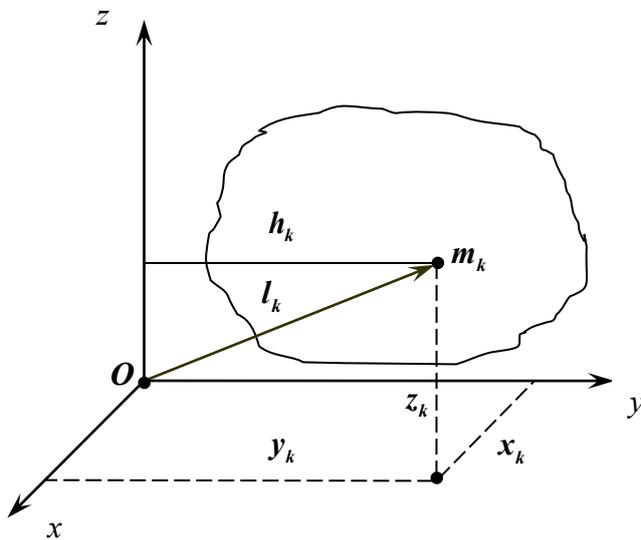
При неперервному розподілу мас в механічній системі, наприклад, коли система являє собою суцільне тверде тіло, суми, що стоять у правих частинах формул (1.3) і (1.4), переходять у відповідні інтеграли.

Моменти інерції

При дослідженні рухів механічної системи недостатньо знати її масу і положення центра мас. Для характеристики розподілу мас в системах, елементи яких беруть участь в обертальному русі, вводять поняття моменту інерції. Розрізняють моменти інерції відносно довільного центра (*полярний момент інерції*), відносно осі (*осьовий момент інерції*), відносно площини (*планарний момент інерції*), а також *відцентрові* моменти інерції.

Полярним моментом інерції механічної системи, що складається з « n » матеріальних точок, відносно деякого центра O називається сума добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней від цього центра (рис.1.2):

$$I_0 = \sum_{k=1}^n m_k \cdot l_k^2 \quad (k = \overline{1, n}).
 \tag{1.5}$$



Моментом інерції системи відносно довільної осі (наприклад, осі Oz рис.3.14) називають суму добутків мас кожної точки системи на квадрати їх відстаней до цієї осі:

$$I_{Oz} = \sum_1^n m_k \cdot h_k^2. \quad (1.6)$$

Для суцільних твердих тіл формули (1.5) і (1.6) набувають, *Рис. 1.2* відповідно, вигляду:

$$I_0 = \int l^2 dm, \quad I_{Oz} = \int h^2 dm. \quad (1.7)$$

Радіус інерції. В техніці дуже часто для визначення моменту інерції деталей (тіл) складної форми користуються поняттям радіуса інерції цих тіл.

Радіусом інерції тіла відносно даної осі називають відстань ρ від осі до такої точки, в якій потрібно зосередити масу всього тіла, щоб момент інерції однієї цієї точки дорівнював моменту інерції тіла відносно тієї ж осі:

$$I = M \rho^2, \quad (1.8)$$

звідкіля:

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{M}} \quad (1.9)$$

Планарним моментом інерції називають скалярну величину, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки системи на квадрат відстані цієї точки до певної площини.

Так, коли матеріальна система розглядається в декартовій системі координат (рис.1.2), то її моменти інерції відносно площин xOy , yOz і xOz відповідно будуть дорівнювати:

$$I_{xOy} = \sum_1^n m_k \cdot z_k^2, \quad I_{yOz} = \sum_1^n m_k \cdot x_k^2, \quad I_{xOz} = \sum_1^n m_k \cdot y_k^2 \quad (1.10)$$

Крім осьових і полярних моментів інерції, при розв'язанні деяких задач динаміки (наприклад, в теорії зрівноважування роторів) користуються *відцентровими моментами інерції (ВМІ)*.

Відцентровим моментом інерції механічної системи називають величину, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки системи на дві її координати, тобто:

$$I_{yz} = \sum_1^n m_k y_k z_k; \quad I_{xz} = \sum_1^n m_k x_k z_k; \quad I_{xy} = \sum_1^n m_k x_k y_k \quad (1.11)$$

Відцентрові моменти інерції залежать не тільки від напряму координатних осей, а і від вибору початку координат. Тому, коли іде мова про відцентровий момент інерції у певній точці, то під цим розуміють, що початок координат співпадає з цією точкою.

На відміну від осьових, відцентрові моменти інерції можуть бути додатними від'ємними або перетворюватись на нуль.

Якщо два ВМІ, що містять у своїх індексах знак певної координатної осі, дорівнюють нулю, то ця вісь називається *головною віссю інерції* механічної системи або тіла в даній точці. Наприклад, якщо $I_{xz} = I_{yz} = 0$, то вісь z є головною віссю інерції. Якщо до того ця вісь проходить через центр мас тіла (системи), то вона називається *головною центральною віссю інерції*.

Слід відмітити два частинних випадки, коли зразу можна визначити характер осі:

1. Якщо тіло має площину матеріальної симетрії, то для всіх її точок вісь, перпендикулярна до площини симетрії, є головною віссю інерції.

2. Якщо тіло (матеріальна система) має вісь матеріальної симетрії, то ця вісь є головною центральною віссю інерції, і її часто називають віссю *динамічної симетрії*.

Теорема Гюйгенса

Моменти інерції даного тіла відносно різних осей будуть мати різні значення. Залежність між моментами інерції тіла відносно двох паралельних осей визначається теоремою Гюйгенса:

момент інерції механічної системи (твердого тіла) відносно будь-якої осі дорівнює сумі момента інерції відносно осі, що проходить через центр мас цієї системи (тіла) паралельно даній, і добутку маси системи на квадрат відстані між цими осями.

Припустимо, що відомий момент інерції тіла відносно осі Cz_c , яка проходить через центр мас C тіла. Визначимо момент інерції цього тіла відносно осі Oz , проведеної паралельно до Cz_c на відстані « d » від неї (рис.3.15). Оберемо довільну точку K тіла масою m_k , яка відстоїть від центральної осі Cz_c на відстані $AK = h_{KC}$ і на відстані $BK = h_K$ - від осі Oz .

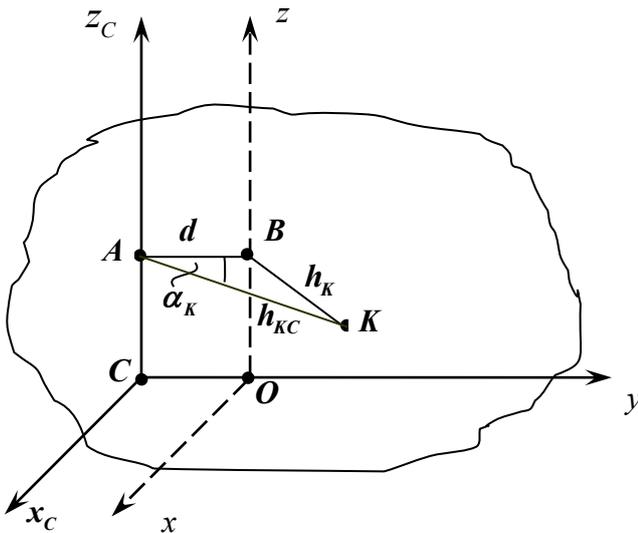


Рис. 1.3

Утворений трикутник ABK з кутом $\angle BAK = \alpha_K$ буде паралельним площині $x_c y_c$ (а також xOy).

З трикутника за теоремою косинусів отримаємо:

$h_K^2 = h_{KC}^2 + d^2 - 2h_{KC} \cdot d \cdot \cos \alpha_K$ По множимо кожний член цього співвідношення на масу K -ї точки m_k і просумуємо по всіх точках тіла:

$$\sum_1^n m_k h_K^2 = \sum_1^n m_k h_{KC}^2 + \sum_1^n m_k d^2 - 2d \sum_1^n m_k h_{KC} \cos \alpha_K$$

Оскільки:

$$\sum_1^n m_k \cdot h_K^2 = I_z, \quad \sum_1^n m_k \cdot h_{KC}^2 = I_{Cz}, \quad \sum_1^n m_k \cdot d^2 = M \cdot d^2 \text{ і } h_{KC} \cdot \cos \alpha_K = y_k, \text{ то:}$$

$$I_z = I_{Cz} + Md^2 - 2d \sum_1^n m_k y_k.$$

Але $\sum_1^n m_k y_k = M \cdot y_C = 0$, бо в нашому випадку координата центра мас тіла $y_C = 0$.

Таким чином, кінцево маємо:

$$I_z = I_{Cz} + Md^2, \tag{1.12}$$

що і потрібно було довести.

Обчислення осьових моментів інерції деяких однорідних тіл

1. Тонкий однорідний стержень довжиною l і масою M .

Підрахуємо момент інерції стержня відносно осі Az , що проходить через його кінець A перпендикулярно до осі стержня. Координатну вісь Ax направляємо вздовж AB (рис.а).

Оскільки стержень однорідний, то маса елементарного відрізка довжиною dx , який знаходиться на відстані x від осі Az , $dm = \frac{M}{l} dx$.

Тоді згідно з формулою (3.50):

$$I_{Az} = \int_0^l x^2 dm = \frac{M}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} Ml^2.$$

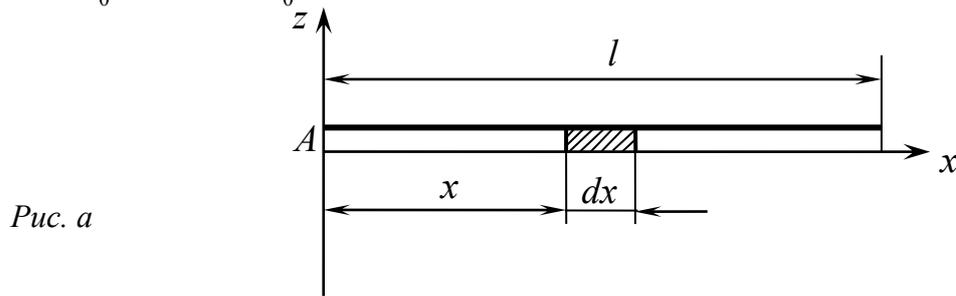


Рис. а

2. Тонке однорідне кільце маси M і радіуса R .

Визначимо момент інерції кільця відносно осі Cz , що проходить через його центр мас C перпендикулярно до площини кільця (рис. б). Так як всі елементарні маси кільця знаходяться на однаковій відстані R від осі Cz , то:

$$I_{Cz} = \sum_1^n m_k \cdot R^2 = \left(\sum_1^n m_k\right) \cdot R^2 = M \cdot R^2.$$

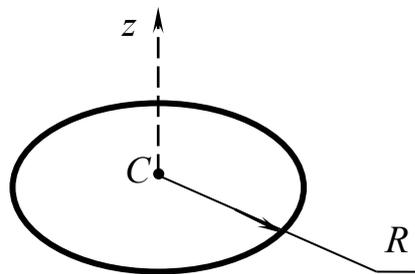


Рис. б

3. Кругла однорідна пластина чи циліндр радіуса R і маси M .

Підрахуємо момент інерції круглої пластини відносно осі Cz , перпендикулярної до пластини (рис. в). Площа елементарного кільця радіуса r і шириною dr дорівнює $2\pi r \cdot dr$.

Маса одиниці площі $\frac{M}{\pi R^2}$. Тоді маса елементарного кільця $dm = 2\frac{M}{R^2} r dr$, а момент інерції

$$dI_{Cz} = r^2 \cdot dm = 2\frac{M}{R^2} r^3 dr.$$

Для всієї пластини :

$$I_{Cz} = 2\frac{M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2.$$

Момент інерції I_{Cz} для однорідного круглого циліндра масою M і радіусом R відносно його поздовжньої центральної осі (рис. г) буде визначатися такою ж формулою.

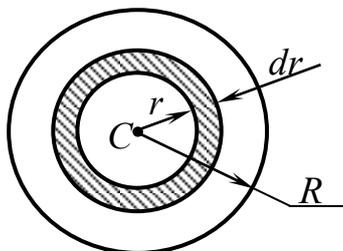


Рис. в

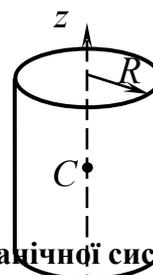


Рис. г

3.3.4. Диференціальні рівняння руху механічної системи

Розглянемо механічну систему, що складається з « n » матеріальних точок. Використаємо принцип звільнення від в'язей і замінимо в'язі їх реакціями. Всі сили, що діють на систему, поділимо на зовнішні і внутрішні. Тоді для довільної точки k системи масою m_k на підставі основного закону динаміки отримаємо:

$$m_k \vec{W}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad (1.13)$$

де \vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i - рівнодіючі зовнішніх сил, які діють на k -ту точку.

Аналогічного виду рівняння отримуємо і для будь-якої точки системи. Тобто всього для заданої системи будемо мати n таких рівнянь ($k = \overline{1, n}$).

Така система рівнянь і є диференціальними рівняннями руху механічної системи у векторній формі.

Якщо спроектувати n рівнянь (3.56) на осі обраної системи координат, то отримаємо систему алгебраїчних диференціальних рівнянь руху системи в проєкціях на осі.

Наприклад, при використанні декартової системи координат $Oxyz$ будемо мати $3n$ скалярних рівнянь виду:

$$\left. \begin{aligned} m_k W_{kx} &= F_{kx}^e + F_{kx}^i; \\ m_k W_{ky} &= F_{ky}^e + F_{ky}^i; \\ m_k W_{kz} &= F_{kz}^e + F_{kz}^i. \end{aligned} \right\} (k = \overline{1, n}) \quad (1.14)$$

Як можна бачити, для визначення руху механічної системи за заданими силами і початковими умовами необхідно проінтегрувати систему з $3n$ диференціальних рівнянь. Цю задачу не завжди можна розв'язати точно навіть для однієї точки. Вона виключно складна у випадку двох матеріальних точок, що рухаються під дією сил взаємодії за законом всесвітнього тяжіння, і зовсім не може бути розв'язана при взаємодії трьох точок.

Інколи з диференціальних рівнянь (1.14) можна отримати так звані перші інтеграли, тобто співвідношення, до яких не входять похідні другого порядку від координат за часом. До таких перших інтегралів відносяться закони збереження механічного руху і загальні теореми динаміки системи матеріальних точок.

Завдяки впровадженню спеціальних сумарних характеристик руху всієї системи в цілому, які мають наочний фізичний зміст, загальні теореми динаміки є ефективним апаратом механіки і широко використовуються в інженерних розрахунках.

При цьому необхідно пам'ятати, що у математичні вирази цих теорем, а також до формул, що є висновками з загальних теорем, входять *абсолютні швидкості* і *абсолютні прискорення*.

Загальні теореми динаміки

Кількість руху і теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і системи

Однією з мір механічного руху матеріальних об'єктів є кількість їх руху, або імпульс.

Кількістю руху (імпульсом) матеріальної точки називається векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості, тобто:

$$\vec{q} = m\vec{v}.$$

Кількістю руху (імпульсом) механічної системи називають вектор, рівний геометричній сумі векторів кількостей руху (імпульсів) всіх матеріальних точок системи:

$$\vec{Q} = \sum_1^n m_k \vec{v}_k.$$

На відміну від кількості руху \vec{q} точки, який є зв'язаним вектором, вектор кількості руху механічної системи \vec{Q} є вільним вектором.

В системі СІ кількість руху має розмірність $H \cdot c$, або $\frac{kg \cdot m}{c}$.

Для обчислення кількості руху механічної системи дещо перетворимо вираз

$$\vec{Q} = \sum_1^n m_k \vec{v}_k = \sum_1^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_1^n m_k \vec{r}_k.$$

В свою чергу з визначення центра мас системи виходить, що

$$\sum_1^n m_k \vec{r}_k = M \cdot \vec{r}_c$$

$$\text{і } \frac{d}{dt} \sum_1^n m_k \vec{r}_k = \frac{d}{dt} M \vec{r}_c = M \vec{v}_c.$$

Тоді:

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_c.$$

Таким чином, вектор кількості руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на вектор швидкості її центра мас.

Доцільно зауважити, що вектор \vec{Q} , подібно до головного вектора сил в статиці, є певною узагальненою характеристикою руху всієї механічної системи. В загальному випадку кількість руху можна розглядати як характеристику поступальної частини руху системи разом з її центром мас.

При практичних розрахунках доцільно користуватися алгебраїчними рівняннями, що виходять з (3.59):

$$Q_x = M \cdot v_{cx}, \quad Q_y = M \cdot v_{cy}, \quad Q_z = M \cdot v_{cz}.$$

Звідсіля величина кількості руху:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} = M \cdot \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2 + v_{cz}^2}.$$

Як відомо з курсу фізики, міру дії сили \vec{F} на матеріальну точку за елементарний проміжок часу dt називають елементарним імпульсом сили \vec{F} , тобто:

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt.$$

Імпульс \vec{S} сили \vec{F} за кінцевий проміжок часу $(t - t_0)$ визначають за формулою:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot dt.$$

Модуль імпульса сили підраховують за його проекціями на координатні осі:

$$S_x = \int_{t_0}^t F_x \cdot dt; \quad S_y = \int_{t_0}^t F_y \cdot dt; \quad S_z = \int_{t_0}^t F_z \cdot dt;$$

$$\text{і } S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Основний закон динаміки $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$ можна записати у формі:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} \cdot dt = d\vec{S}.$$

Проінтегруємо це рівняння в межах часу від $t_0 = 0$ до t і отримаємо:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}.$$

Дане рівняння називають теоремою імпульсів в кінцевій формі:

зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодіючої сил, прикладених до точки, за той же проміжок часу.

При розв'язанні задач користуються рівняннями цієї теореми в проекціях на координатні осі.

$$\left. \begin{aligned} m v_x - m v_{0x} &= S_x; \\ m v_y - m v_{0y} &= S_y; \\ m v_z - m v_{0z} &= S_z. \end{aligned} \right\}$$

Тепер розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок. Для кожної з цих точок згідно з (3.56) можна записати:

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad (k = \overline{1, n}).$$

Підсумуємо такі рівняння по всіх точках системи і з урахуванням відомого положення, що сума похідних дорівнює похідній від суми, отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_1^n m_k \vec{v}_k \right) = \sum_1^n \vec{F}_k^e + \sum_1^n \vec{F}_k^i.$$

Так як для внутрішніх сил $\sum_1^n \vec{F}_k^i = 0$, а $\sum_1^n m \vec{v}_k = \vec{Q}$, то маємо:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_1^n \vec{F}_k^e.$$

Останній вираз є математичним записом теореми про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі: *в кожний момент часу похідна за часом від вектора кількості руху системи дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на систему.*

В декартових координатах математичний вираз теореми такий:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_1^n F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_1^n F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_1^n F_{kz}^e.$$

Помножимо обидві частини рівняння (3.67) на dt і проінтегруємо в межах часу $t_0 = 0$ до t :

$$\int_0^t d\vec{Q} = \sum_1^n \int_0^t \vec{F}_k^e \cdot dt,$$

звідкіля:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_1^n \vec{S}_k^e.$$

Ми отримали математичну формулу теореми про зміну вектора кількості руху механічної системи в інтегральному (кінцевому) вигляді. Теорема стверджує, що *зміна вектора кількості руху системи за будь-який проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх зовнішніх сил, які діють на систему, за той же час.*

В проекціях на координатні осі будемо мати:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_1^n S_{kx}^e; \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_1^n S_{ky}^e; \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_1^n S_{kz}^e.$$

З теореми про зміну кількості руху механічної системи можна отримати важливі висновки, які називають *законом збереження кількості руху системи.*

1. Якщо геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то вектор кількості руху її буде сталим як за величиною, так і за напрямом.

Дійсно, при $\sum_1^n \vec{F}_k^e = 0$ з рівняння виходить, що:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \text{ і, відповідно } \vec{Q} = \overline{const}.$$

2. У випадках, коли сума проекцій зовнішніх сил, прикладених до системи, на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху системи на цю вісь залишається незмінною.

Доцільно зауважити, що закон збереження кількості руху зручно використовувати в тих випадках, коли по зміні швидкості однієї частини системи потрібно визначити швидкість її другої частини.

Теоремі про зміну кількості руху механічної системи можна надати ще одну форму, яка зветься *теоремою про рух центра мас.*

Якщо врахувати, що $\vec{Q} = M\vec{v}_c$, то рівняння набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = \sum_1^n \vec{F}_k^e,$$

або, при сталій масі,

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = M\vec{W}_c = \sum_1^n \vec{F}_k^e,$$

де \vec{W}_c - вектор прискорення центра мас системи.

Дане рівняння— це математичний запис теореми про рух центра мас системи: *центр мас механічної системи рухається так само, як матеріальна точка, в якій зосереджена маса всієї системи, під дією головного вектора зовнішніх сил.*

В проєкціях на осі декартової системи координат теорема записується системою рівнянь:

$$M\ddot{x}_c = \sum_1^n F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum_1^n F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_c = \sum_1^n F_{kz}^e,$$

де x_c, y_c, z_c - координати центра мас системи.

Внутрішні сили у відповідності з викладеним не впливають на рух центра мас. Тому, наприклад, людина не може пересуватись на абсолютно гладкій поверхні за допомогою лише зусиль своїх м'язів. Рушійна сила тепловоза або трамвая виникає тільки при наявності тертя. Сили тертя в даному випадку повинні бути віднесені до зовнішніх сил.

З теореми виходять такі висновки:

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас системи перебуває в стані спокою або рухається прямолінійно і рівномірно.

Дійсно, при $\sum \vec{F}_k^e = 0$:

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 \text{ і } \vec{v}_c = \text{const.}$$

2. Якщо проєкція головного вектора зовнішніх сил, що діють на систему, на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, то проєкція швидкості центра мас на цю вісь є сталою величиною.

Наприклад, якщо $\sum F_{kx}^e = 0$, то:

$$M \frac{dv_{cx}}{dt} = 0 \text{ і } v_{cx} = \text{const.}$$

3. У випадку, коли проєкція головного вектора зовнішніх сил, що діють на систему, на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, а центр мас системи був нерухомий відносно цієї осі в початковий момент часу, то положення центра мас відносно осі буде сталим в будь-який момент часу.

Тому алгебраїчна сума добутків мас окремих тіл системи на проєкції абсолютних переміщень центрів мас цих тіл відносно даної осі повинна дорівнювати нулю. Так, якщо викладене стосується осі X , то:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_k \Delta x_k = 0$$

При обчисленні абсолютних переміщень треба завжди враховувати їх знаки в обраній системі відліку.

Кінетична енергія

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна величина, що дорівнює половині добутку її маси на квадрат швидкості точки:

$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

З визначення кінетичної енергії виходить, що вона є скалярною додатною величиною; одиниця її вимірювання $H \cdot m$ або $Дж$.

Кінетичною енергією механічної системи називають суму кінетичних енергій всіх точок цієї системи:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k v_k^2.$$

При поступальному русі твердого тіла миттєві швидкості всіх його точок однакові і дорівнюють швидкості \vec{v}_c центра мас тіла. Тому формула набуває вигляду:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2,$$

де M - маса тіла.

При обертанні тіла навколо нерухомої осі (наприклад, осі z) лінійна швидкість k -ї точки тіла $v_k = \omega h_k$, де h_k - відстань точки до осі обертання. Тоді:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k (\omega h_k)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_1^n m_k h_k^2 = \frac{1}{2} J_z \cdot \omega^2,$$

оскільки $\sum_1^n m_k h_k^2$ - момент інерції J_z тіла навколо осі обертання.

Плоскопаралельний рух тіла можна розглядати як миттєвообертальний навколо осі, що проходить через МЦШ P . Отже, отримаємо:

$$T_{n.n.} = \frac{1}{2} J_P \cdot \omega^2,$$

де J_P - момент інерції тіла навколо осі, що проходить через МЦШ.

За теоремою Гюйгенса:

$$J_P = J_C + M(PC)^2,$$

де: J_C - момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас C тіла паралельно до миттєвої осі обертання. Крім того, якщо швидкість центра мас тіла v_c виразити через добуток кутової швидкості тіла на відстань центра мас до МЦШ - $\omega \cdot PC$, то рівняння набуває вигляду:

$$T_{n.n.} = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega^2.$$

Тобто, кінетична енергія тіла при плоскопаралельному русі складається з енергії поступального руху зі швидкістю центра мас і енергії обертального руху навколо центра мас.

Робота сили

Для характеристики ефекту дії сили на матеріальний об'єкт при його переміщенні користуються поняттям *роботи сили*.

Розглянемо рух матеріальної точки M під дією сили \vec{F} вздовж криволінійної траєкторії (рис. 1.4). За нескінченно малий проміжок часу dt радіус-вектор точки \vec{r} отримає приріст $d\vec{r}$, який називають елементарним переміщенням точки M .

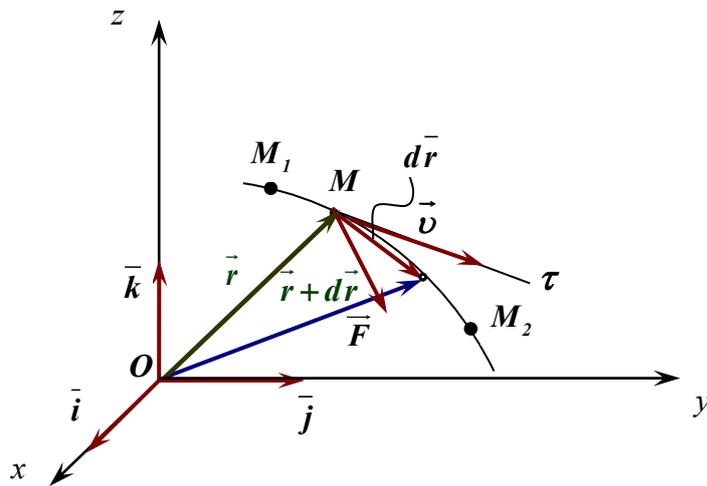


Рис.1.4

Скалярний добуток вектора сили \vec{F} на елементарне переміщення точки називають *елементарною роботою* δA сили:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Робота сили на будь-якому скінченному переміщенні M_1M_2 точки її прикладання (рис.3.18) визначається як границя інтегральної суми відповідних елементарних робіт:

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

В системі СІ одиницею роботи є *Джоуль*: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Якщо вектор сили \vec{F} і вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$ точки розкласти по координатних осях:

$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$, $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, то отримаємо аналітичні вирази роботи сили:

$$\delta A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

$$\text{і } A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz).$$

Останні дві формули визначають роботу сили при координатному способі завдання руху. Скористаємось співвідношенням для визначення проекції швидкості точки в системі координат $Oxyz$:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad \text{з яких виходить, що}$$

$$dx = v_x \cdot dt, \quad dy = v_y \cdot dt, \quad dz = v_z \cdot dt. \text{ Тоді:}$$

$$\delta A = (F_x \cdot v_x + F_y \cdot v_y + F_z \cdot v_z) dt,$$

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \cdot v_x + F_y \cdot v_y + F_z \cdot v_z) dt.$$

В натуральній системі координат $M\tau nb$ елементарне переміщення $d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dS$, де $\vec{\tau}$ - орт дотичної; dS - диференціал дуги траєкторії точки, тому елементарна робота сили:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\tau} \cdot dS = F \cdot dS \cdot \cos(\vec{F}, \vec{\tau}).$$

Відповідно, повна робота сили:

$$A_{1,2} = \int_{S_1}^{S_2} F \cdot \cos(\vec{F}, \nu) dS.$$

В останній формулі S_1, S_2 - дугові координати, які відповідають положенням M_1, M_2 матеріальної точки на її траєкторії (рис.1.4).

В інженерній практиці користуються поняттям потужності, якою оцінюють роботу сили за одиницю часу:

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

З урахуванням рівняння цього рівняння, отримаємо:

$$N = F_x \cdot v_x + F_y \cdot v_y + F_z \cdot v_z = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Тобто, потужністю сили називається величина, що дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості точки її прикладання.

Теорема про зміну кінетичної енергії

Для матеріальної точки масою m , що рухається під дією сили \vec{F} , основне рівняння динаміки має вигляд:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Помножимо обидві частини цього співвідношення скалярно на $d\vec{r}$:

$$m d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

звідкіля

$$m \vec{v} d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Так як $m \vec{v} d\vec{v} = d\left(m \frac{v^2}{2}\right) = d\left(m \frac{v^2}{2}\right)$ і $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \delta A$, то:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \delta A.$$

Дана формула є математичним записом теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі: *диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сили, що діє на цю точку.*

Якщо обидві частини рівняння поділити на dt , то отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = N,$$

з якого виходить, що похідна за часом від кінетичної енергії точки дорівнює потужності сили, прикладеної до цієї точки.

Проінтегруємо обидві частини рівняння в межах, відповідних значенням величин при початковому M_1 і кінцевому M_2 положеннях рухомої точки, і знаходимо:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}$$

або

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}.$$

Отже, *зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт прикладених до неї сил на тому ж переміщенні.*

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок M_K масою m_K кожна, і яка рухається відносно нерухомої системи відліку. Прикладемо до точок системи

зовнішні і внутрішні сили. Тоді для k -ї точки теорема про зміну кінетичної енергії приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k \quad k = \overline{1, n},$$

або

$$dT_k = \delta A_k^e + \delta A_k^i.$$

Підсумуємо ці рівняння по всіх n точках системи:

$$\sum_1^n dT_k = d \sum_1^n T_k = \sum_1^n \delta A_k^e + \sum_1^n \delta A_k^i.$$

Рахуючи, що $\sum_1^n T_k = T$ - кінетична енергія системи, а $\sum_1^n \delta A_k^e = \delta A^e$, $\sum_1^n \delta A_k^i = \delta A^i$,

де δA^e , δA^i - елементарні роботи всіх зовнішніх і всіх внутрішніх сил відповідно, отримаємо:

$$\delta T = \delta A^e + \delta A^i.$$

Таким чином диференціал кінетичної енергії матеріальної системи дорівнює сумі елементарних робіт всіх зовнішніх та внутрішніх сил, що діють на систему.

Інтегруючи даний вираз, отримаємо математичну інтерпретацію теореми в інтегральній формі:

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}^e + A_{1,2}^i.$$

де $A_{1,2}^e$, $A_{1,2}^i$ - відповідно повні роботи зовнішніх і внутрішніх сил на скінченному переміщенні 1-2 системи.

Отже, зміна (приріст) кінетичної енергії системи при переході її з одного положення в інше дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему на даному переміщенні.

4. КІНЕТОСТАТИКА І ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Розглянуті вище рівняння руху матеріальних об'єктів (матеріальних точок, твердих тіл і механічних систем) і загальні теореми, що є висновками з них, виходять безпосередньо з законів Галілея-Ньютона.

Але є багато таких інженерних задач динаміки, розв'язання яких методами ньютонівської механіки потребує дуже великих зусиль, а інколи і взагалі неможливе. В таких випадках користуються методами іншої, так званої *аналітичної механіки*, в основу яких покладено принципи, відмінні від ньютонівських. Засновником цієї вітки механіки був Лейбніць.

Аналітична механіка являє собою великий, багатий ідеями, розділ механіки. Її положення поширюються на такі області, як теорія відносності і квантова механіка, де закони Галілея-Ньютона не можуть бути застосовані.

Для спрощення, щоб не виходити за межі ньютонівської механіки, будемо розглядати ці принципи як такі, що є наслідками законів класичної механіки з додаванням до них аксіом про звільнення від в'язей. В той же час потрібно розуміти, що це не теореми, які доводяться за допомогою законів Галілея-Ньютона, а саме принципи. Якщо взяти їх за основу, можна отримати і закони Ньютона, і всю ньютонівську механіку.

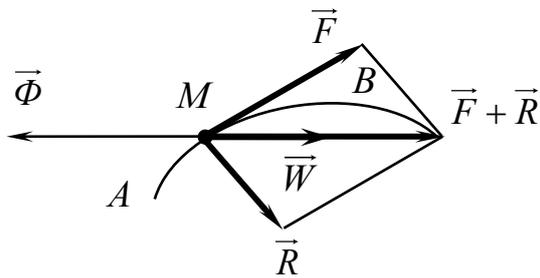
Розробниками основних принципів аналітичної механіки були французькі вчені Даламбер (1717-1783) і Лагранж (1736-1813).

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера дозволяє приводити всі задачі, які відносяться до руху тіл, до більш простої задачі про рівновагу.

Сучасне трактування принципу Даламбера з використанням поняття *сили інерції*, яке було уведено в механіку на початку XIX століття, є фундаментом важливого метода технічної механіки – *метода кінетостатики*.

Розглянемо матеріальну точку M масою m , що рухається з деяким прискоренням \vec{W} вздовж траєкторії AB . Припустимо, що на точку діє система активних сил, рівнодіючу яких позначимо через \vec{F} , а також реакції в'язей (у випадку якщо точка є невільною) з рівнодіючою \vec{R} (рис.1.5).



Тоді, згідно з рівнянням динаміки для невільної точки:

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{R},$$

$$\text{або } \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{W}) = 0$$

Позначимо:

$$-m\vec{W} = \vec{\Phi}.$$

Рис.4.1

Вектор $\vec{\Phi}$ називають даламберовою силою інерції. Її можна розглядати як силу, з якою точка діє на тіла, що надають прискорення даній точці.

Сила інерції матеріальної точки за величиною дорівнює добутку маси точки на модуль її прискорення і має напрям, протилежний напрямку прискорення (але не руху).

Таким чином, рівність набуває вигляду:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Останнє рівняння і виражає принцип Даламбера:

для невільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакцій її в'язей і сили інерції дорівнює нулю.

При координатному способі задання руху в системі відліку $Oxyz$ векторне рівняння переходить в систему скалярних рівнянь:

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0;$$

$$F_y + R_y + \Phi_y = 0;$$

$$F_z + R_z + \Phi_z = 0.$$

Якщо ж рух точки задано натуральним способом, то будемо мати систему таких рівнянь:

$$F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0;$$

$$F_n + R_n + \Phi_n = 0;$$

$$F_b + R_b + \Phi_b = 0.$$

В рівняннях і $\Phi_x = mW_x$; $\Phi_y = mW_y$; $\Phi_z = mW_z$;

$$\Phi_\tau = m \frac{dv}{dt} \text{ - тангенціальна складова сили інерції;}$$

$$\Phi_n = m \frac{dv^2}{\rho} \text{ - нормальна (відцентрова) сила інерції;}$$

$$\Phi_b = mW_b = 0 \text{ (рис.1.6).}$$

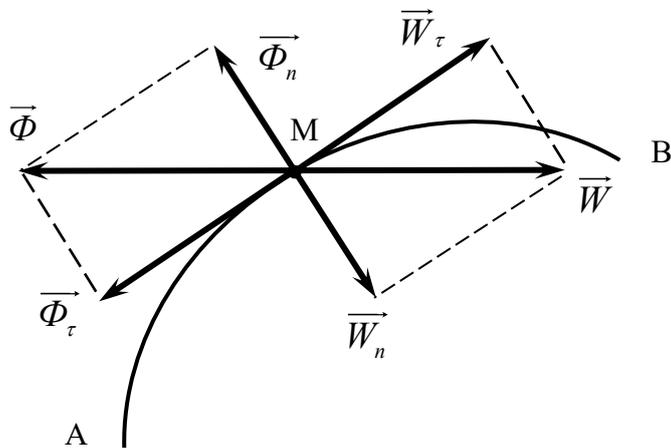


Рис.1.6

Принцип Даламбера для механічної системи

Нехай у довільній точці M_K масою m_K системи, що складається з " n " матеріальних точок, прикладені активна сила \vec{F}_k і реакція в'язі \vec{R}_K . Тоді для k -ї точки рівняння кінетостатики запишеться так:

$$\vec{F}_K + \vec{R}_K + \vec{\Phi}_K = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Підсумуємо рівняння по всіх точках механічної системи і дістанемо:

$$\sum_1^n \vec{F}_K + \sum_1^n \vec{R}_K + \sum_1^n \vec{\Phi}_K = 0.$$

Позначивши головні вектори активних сил, реакцій в'язей і сил інерції відповідно через

$$\vec{F}_\Gamma = \sum_1^n \vec{F}_K, \quad \vec{R}_\Gamma = \sum_1^n \vec{R}_K, \quad \vec{\Phi}_\Gamma = \sum_1^n \vec{\Phi}_K, \text{ вираз запишемо у вигляді:}$$

$$\vec{F}_\Gamma + \vec{R}_\Gamma + \vec{\Phi}_\Gamma = 0.$$

Припустимо, що положення k -ї точки даної системи в декартових координатах $Oxyz$ визначається радіусом-вектором \vec{r}_k . Помножимо його векторно на сили, які входять до рівняння (4.6), і визначимо їх моменти відносно центра O :

$$\vec{r}_K \times \vec{F}_K + \vec{r}_K \times \vec{R}_K + \vec{r}_K \times \vec{\Phi}_K = 0,$$

або:

$$\overline{M}_o(\vec{F}_K) + \overline{M}_o(\vec{R}_K) + \overline{M}_o(\vec{\Phi}_K) = 0.$$

Підсумуємо останні співвідношення по всіх точках системи:

$$\sum_1^n \overline{M}_o(\vec{F}_K) + \sum_1^n \overline{M}_o(\vec{R}_K) + \sum_1^n \overline{M}_o(\vec{\Phi}_K) = 0.$$

Якщо використати поняття головних моментів цих сил, то останнє рівняння набуває такої форми:

$$\overline{M}_{\Gamma, O}^{акт} + \overline{M}_{\Gamma, O}^R + \overline{M}_{\Gamma, O}^{ін} = 0.$$

Попередні рівняння виражають принцип Даламбера для механічної системи: в кожний момент часу векторні суми головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції і головних моментів цих же сил відносно обраного центра дорівнюють нулю.

Отримані векторним рівнянням відповідають шість алгебраїчних рівнянь в координатній формі:

$$\sum_1^n (F_{kx} + R_{kx} + \Phi_{kx}) = 0; \quad \sum_1^n (M_x(\vec{F}_k) + M_x(\vec{R}_k) + M_x(\vec{\Phi}_k)) = 0;$$

$$\sum_1^n (F_{ky} + R_{ky} + \Phi_{ky}) = 0; \quad \sum_1^n (M_y(\vec{F}_k) + M_y(\vec{R}_k) + M_y(\vec{\Phi}_k)) = 0;$$

$$\sum_1^n (F_{kz} + R_{kz} + \Phi_{kz}) = 0; \quad \sum_1^n (M_z(\vec{F}_k) + M_z(\vec{R}_k) + M_z(\vec{\Phi}_k)) = 0.$$

Оскільки головний вектор і головний момент внутрішніх сил дорівнюють нулю, то в рівняннях внутрішні сили відсутні.

Зведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого виду

В статичі була доведена теорема, відповідно до якої довільну систему сил можна звести до будь-якого центра і замінити в загальному випадку однією силою (головним вектором) і однією парою сил (головним моментом). Таке ж зведення можна виконати і для сил інерції.

Згідно із формулою головний вектор сил інерції визначається рівнянням:

$$\vec{\Phi}_I = -\sum_1^n m_K \vec{W}_K.$$

$$\text{Але } -\sum_1^n m_K \vec{W}_K = -\sum_1^n \frac{d(m_K \vec{v}_K)}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_1^n m_K \vec{v}_K = -\frac{d\vec{Q}}{dt},$$

де \vec{Q} - вектор кількості руху механічної системи. В свою чергу $\vec{Q} = M\vec{v}_c$ і тому

$$-\frac{d\vec{Q}}{dt} = -M \cdot \vec{W}_c.$$

Тоді:

$$\vec{\Phi}_I = -M\vec{W}_c,$$

З цієї формули виходить, що при всякому русі твердого тіла головний вектор сил інерції дорівнює добутку маси тіла на прискорення його центра мас і має напрям, протилежний напрямку цього прискорення.

Подібні перетворення виконаємо з виразом головного момента сил інерції:

$$\vec{M}_{O_I}^{in} = -\sum_1^n \vec{M}_o(\vec{\Phi}_K) = -\sum_1^n \vec{r}_K \times \vec{\Phi}_K = -\sum_1^n \vec{r}_K \times m_K \frac{d\vec{v}_K}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_1^n \vec{r}_K \times m_K \vec{v}_K$$

Так як $\sum_1^n \vec{r}_K \times m_K \vec{v}_K = \vec{K}_0$, то кінцево

$$\vec{M}_{O_I}^{in} = -\frac{d\vec{K}_0}{dt}.$$

Тобто, головний момент сил інерції дорівнює першій похідній за часом від вектора кінетичного момента механічної системи, взятій зі знаком мінус.

Питання для самоконтролю

1. Які дві класифікації сил застосовують у динаміці? У чому їх умовність?
2. В якій механічній системі внутрішні сили знаходяться у рівновазі?
3. Декілька автомобілів рухаються по дорозі. Чи утворюють вони механічну систему?
4. Вагон, що рухається, ударяється об нерухомий вагон. На який з них буде діяти більша сила?

5. Якими величинами характеризується розподіл мас в механічній системі?
6. Як визначається центр мас механічної системи?
7. Як визначаються і як класифікуються моменти інерції механічної системи?
8. Які осі називають головними центральними осями? Які властивості вони мають?
9. Як формулюється теорема Гюйгенса?
10. Для деякого тіла радіус інерції відносно осі C_z , що проходить через центр мас, дорівнює ρ . Чи є осі, які паралельні осі C_z , відносно яких величина радіуса інерції цього тіла буде: більше ρ ? менше ρ ?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Айзенберг Т.Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высш.шк., 1968. - 436 с.
2. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3т.- М.: Наука, 1971-1973.
3. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т.- М.: Наука, 1976-1979.
4. Бухольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В. 2ч. – М.: Наука, 1967.
5. Гернет М. М. Курс теоретической механики.-М.: Высш.шк., 1981. - 303 с.
6. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики.- М.: Высш. шк., 1974-528 с.
7. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики: В 2т.- М.: Наука, 1972-1977.
8. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Кильчевская Е. Н. Основы теоретической механики. - К., Техніка, 1986.
9. Лойцянский Л.Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2т. – М.: Наука, 1984.
10. Мещерский Н. В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука, 1980. - 446 с.
11. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Уч. пособие.- М.: Наука, 1990. –416 с.
12. Павловский М. А. Теоретична механіка: - К.: Техніка 2002 – 510 с.
13. Павловский М.А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика: Статика. Кинематика. - К.: Вища школа, 1989. – 351 с.
14. Павловский М.А., Акифиева Л. Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика: Динамика. - К.: Вища школа, 1990.– 480 с.
15. Путята Т.В., Фрадлин Б. М. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки.- К.: Рад. школа, 1955. - 368 с.
16. Савин Г.Н., Путята Т. В., Фрадлин Б. Н. Курс теоретической механики. – К.: Вища школа, 1973. - 359 с.
17. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Высш. шк., 1986.- 416 с.
18. Яблонский А. А. Курс теоретической механики: В. 2т.- М.: Высш. шк., 1977. – Т – 2 –430 с.
19. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики: В 2т. – М.: Высш. шк., 1977.
20. Яблонский А. А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике.- М.: Высш. шк., 1978. - 240 с.
21. Золотов М. С., Рубаненко О. І., Жуков В. Ф. Теоретична механіка: (Навч.-метод. посібник для студентів технічних спеціальностей). - Харків: ХДАМГ, 1999.
22. Шпачук В. П., Золотов М. С., Рубаненко О. І, Гарбуз А. О. Теоретична механіка: Навч.-метод. посібник для студентів технічних спеціальностей, Харків: ХДАМГ, 2001.

Теоретична механіка [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» галузь знань 19 «Архітектура та будівництво» ОПП: «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн» ОПП «Будівництво та експлуатація будівель та споруд»/уклад. Я.В. Оласюк – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ», 2022. – 106 с

Комп'ютерний набір і верстка : Я.В. Оласюк
Редактор: Я.В. Оласюк

Підп. до друку _____ 2022 р. Формат А5.
Папір офіс. Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. _____
Обл. вид. арк. _____ Тираж 15 прим.