

Міністерство освіти і науки України  
Відокремлений структурний підрозділ  
«Любешівський технічний фаховий коледж  
Луцького національного технічного університету»



## **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

### **Методичні вказівки до виконання розрахунково – графічних робіт**

для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр

спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»

галузь знань 19 «Архітектура та будівництво»

ОПП: «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн»

ОПП «Будівництво та експлуатація будівель та споруд»

Любешів 2022

УДК

Т

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ»

\_\_\_\_\_ Герасимик-Чернова Т.П.

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу

Бібліотекар \_\_\_\_\_ М.М. Деміх

Затверджено методичною радою ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ»  
протокол № \_\_\_\_\_ від « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 р.

Рекомендовано до видання на засіданні циклової методичної комісії викладачів будівельного профілю

протокол № \_\_\_\_\_ від « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 р.

Голова циклової методичної комісії \_\_\_\_\_ Данилік С.М.

Укладач: \_\_\_\_\_ Я.В. Оласюк, викладач вищої категорії

Рецензент: \_\_\_\_\_ А.В. Хомич, к. т. н.

Відповідальний за випуск: \_\_\_\_\_ Данилік С.М. викладач вищої категорії,  
голова циклової методичної комісії викладачів будівельного профілю.

Теоретична механіка [Текст]: методичні вказівки до виконання розрахунково – графічних робіт для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» галузь знань 19 «Архітектура та будівництво» ОПП: «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн» ОПП «Будівництво та експлуатація будівель та споруд»/уклад. Я.В. Оласюк – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ», 2022. – 51 с

## ЗМІСТ

1.	ВСТУП.....	4
2.	РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА№1: ПЛОСКА СИСТЕМА ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ.....	5
3.	РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА№2: ЦЕНТР ВАГИ ПЛОСКИХ ТІЛ.....	13
4.	РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА№3: ДИНАМІКА ТОЧКИ.....	25
5.	ЛІТЕРАТУРА.....	50

## ВСТУП

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Вона належить до фундаментальних природничих наук,

оскільки природознавство вивчає різні форми руху матерії. Теоретична механіка має велике значення в підготовці інженерних кадрів. Вона є фундаментом для вивчення таких дисциплін, як опір матеріалів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеро- і гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування рухомими об'єктами, теорія механізмів і машин, приладів, роботів-маніпуляторів. Знання законів теоретичної механіки дає змогу науково передбачити хід процесів у нових задачах, що виникають при розвитку науки, техніки і технології.

Теоретична механіка – це наука, яка дає універсальні методи складання і аналізу рівнянь руху і рівноваги складних матеріальних систем, що є основою їх моделювання.

Теоретична механіка спирається на знання з аналітичної геометрії, векторної алгебри, математичного аналізу, фізики та інформатики.

Цей навчально-методичний посібник призначений для самостійного оволодіння студентами технічних спеціальностей безвідривної форми навчання факультету післядипломної освіти і заочного навчання курсу теоретичної механіки та виконання індивідуальних завдань для контрольних робіт, які дозволяють закріпити пройдений матеріал курсу.

Теоретична механіка поділяється на три частини: статика, кінематика, динаміка. Статика вивчає умови рівноваги тіл. Кінематика розглядає рух без урахування чинників, що його породжують. Динаміка вивчає рух залежно від чинників, що його викликають, – від взаємодії з іншими тілами.

## ***РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА №1***

***ТЕМА: Плоска система паралельних сил***

Балка (рис.1.1-1.6) завантажена силою  $P$ , розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$  та парою сил з моментом  $M$ . Знайти реакції в'язей. Дані для розрахунків приведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Варіант	$M$ , кН·м	$F$ , кН	$Q$ , кН/м	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$d$ , м
1	5	4	2	2	3	4	2
2	6	3	1	3	2	5	1
3	1	5	2	1	2	4	3
4	4	1	2	2	3	5	1
5	6	8	1	3	2	4	2
6	3	5	2	1	3	5	2
7	4	6	1	2	3	4	1
8	5	7	2	3	2	5	2
9	6	8	1	1	2	4	2
0	5	3	2	2	3	5	3

### 2.1 Приклади виконання завдання

*Приклад 1:* Для балки (Рис 1.7) знайти опорні реакції, якщо  $P=3$  кН,  $q=1$  кН/м.

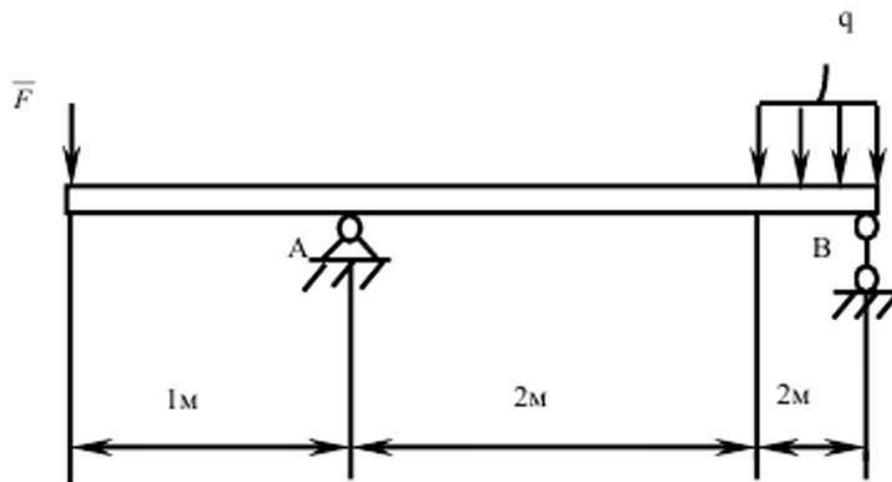


Рисунок 1.5

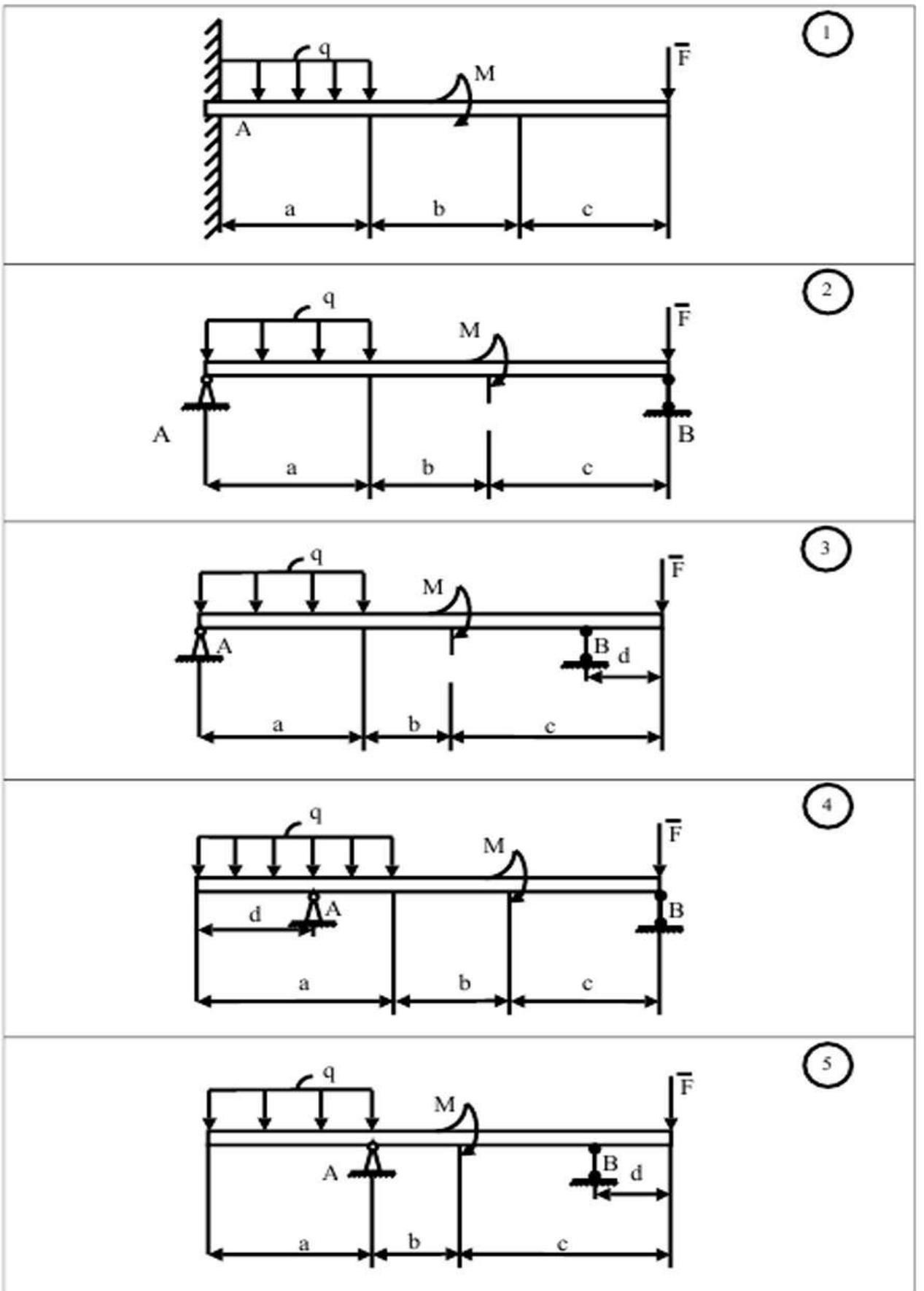


Рисунок 1.1

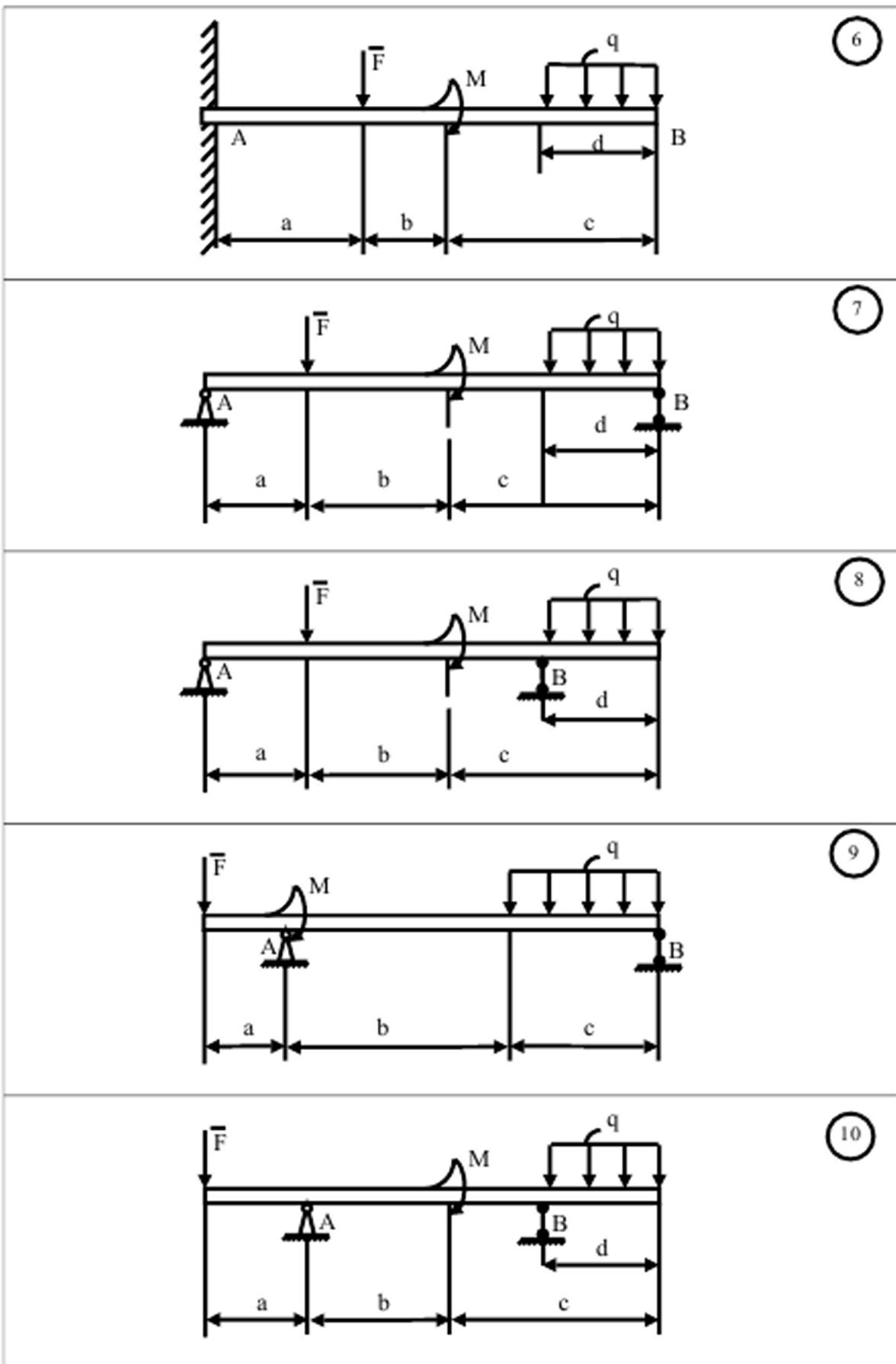
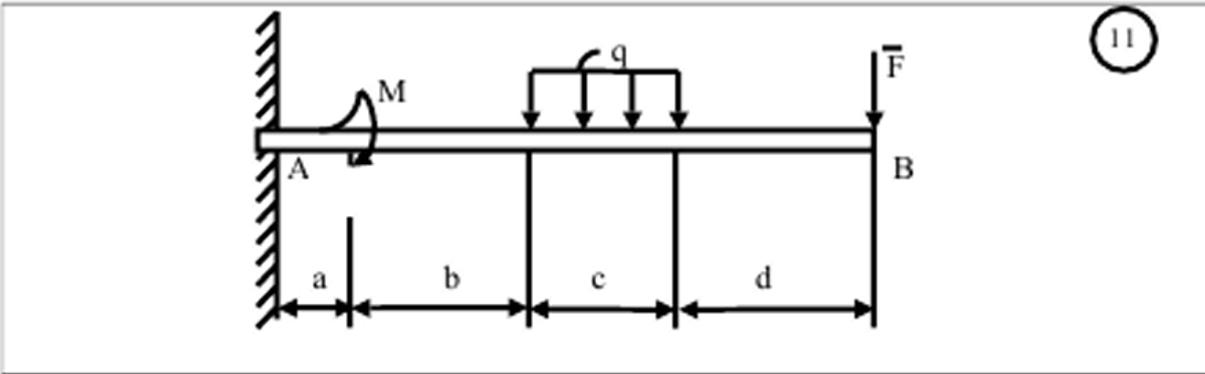
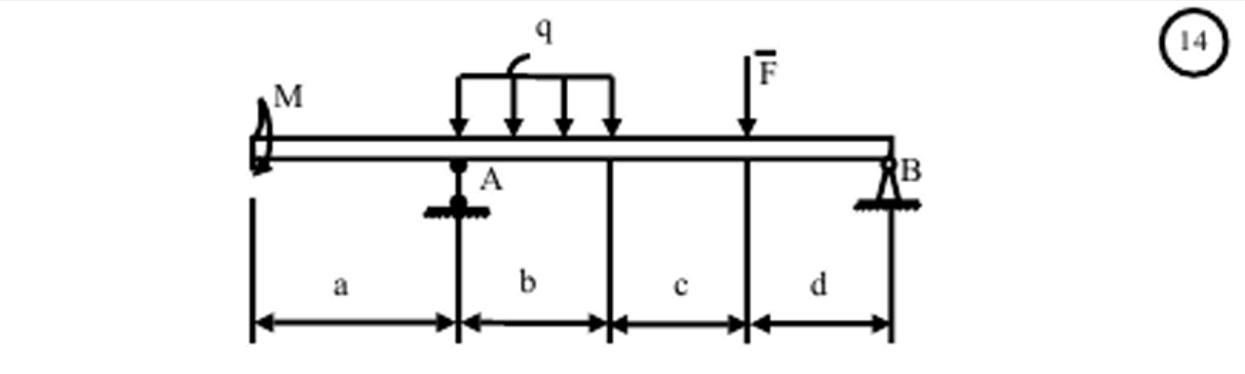


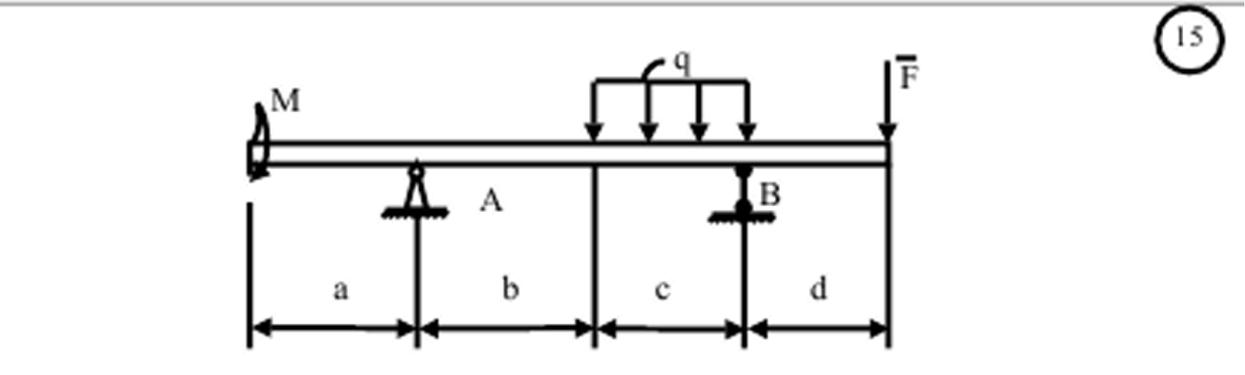
Рисунок 1.2



11



14



15

Рисунок 1.3

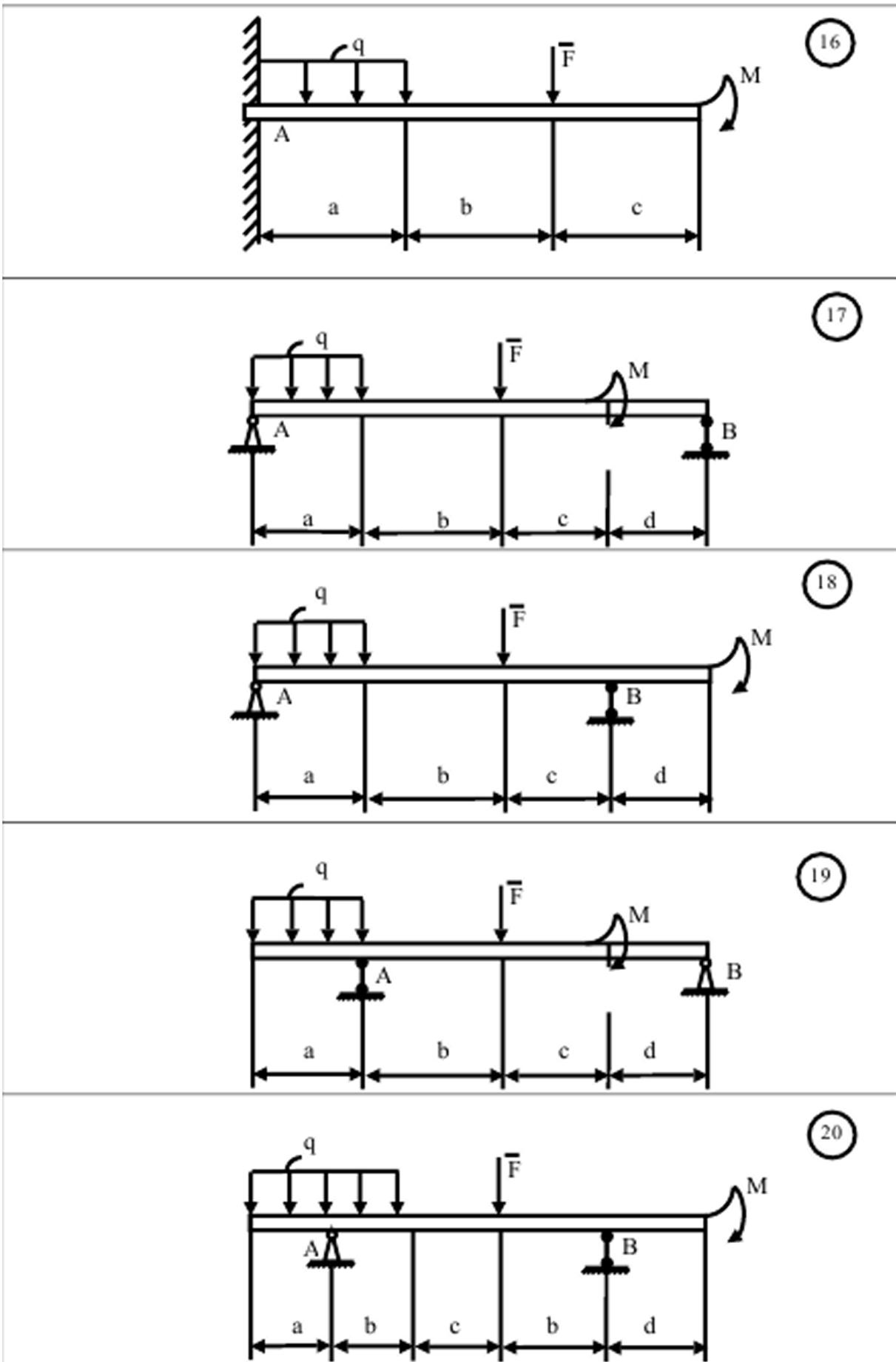


Рисунок 1.4

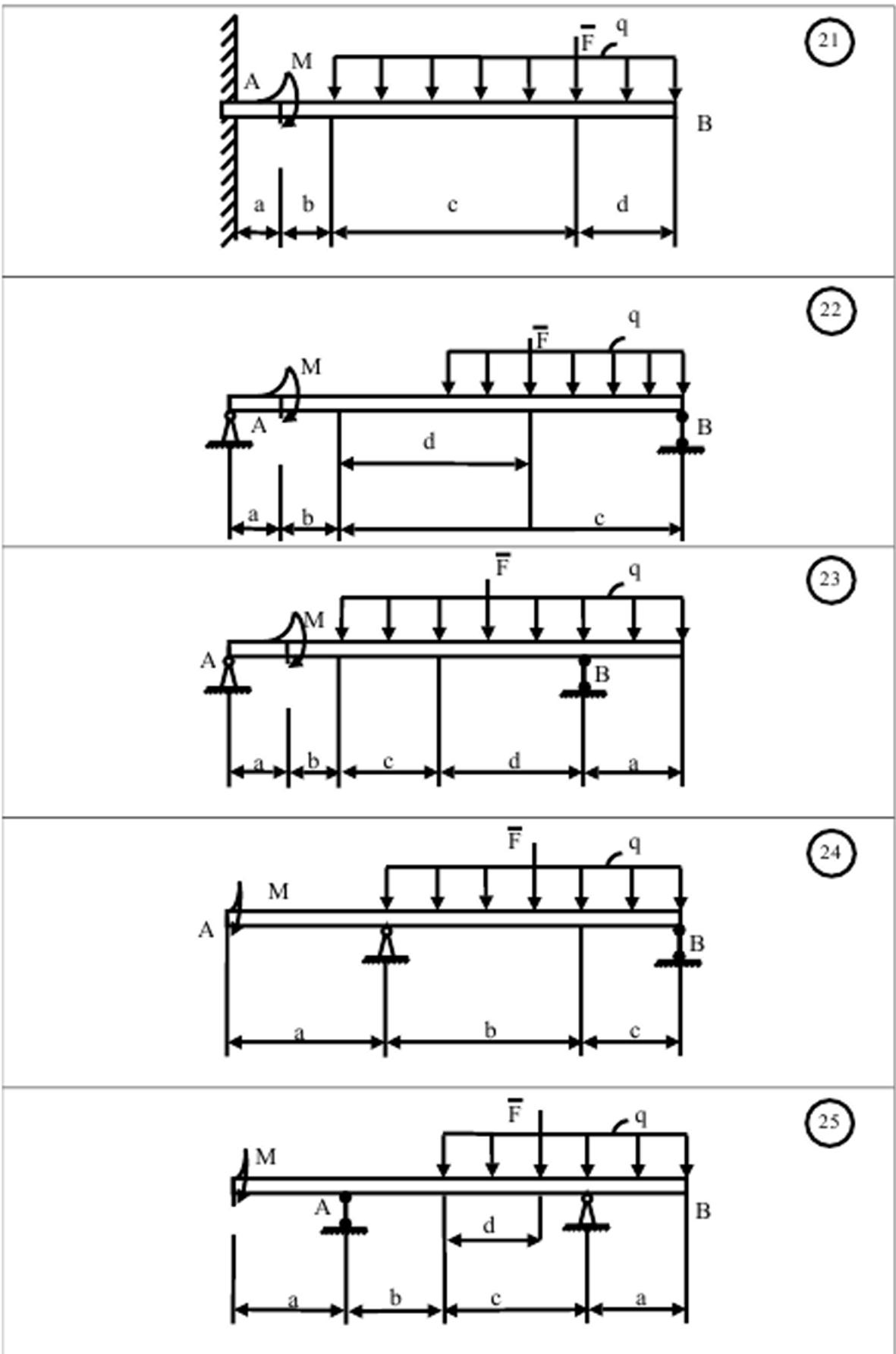


Рисунок 1.5

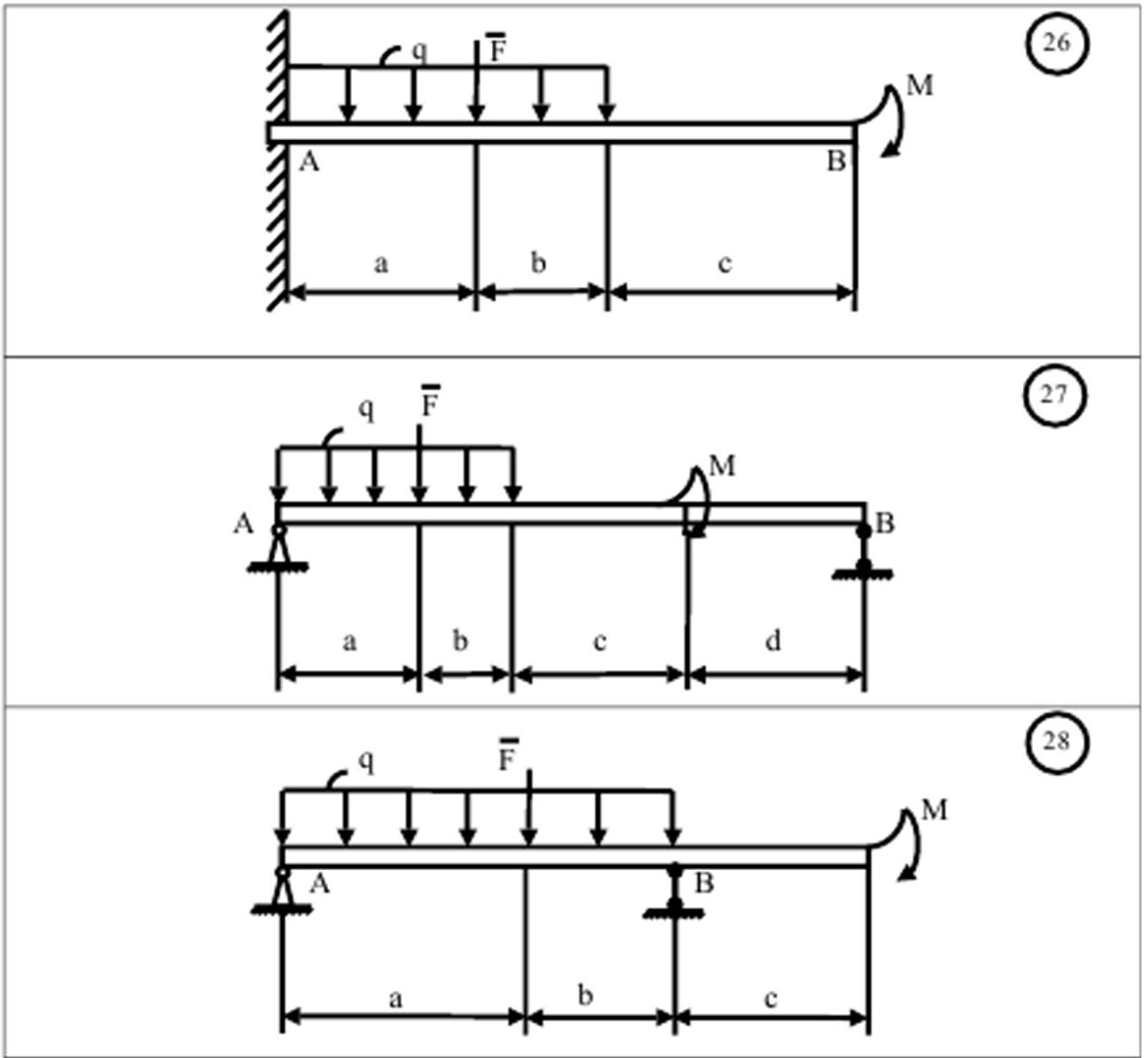


Рисунок 1.6

*Розв'язання.* Розглянемо балку АВ, що знаходиться у рівновазі (спокої).

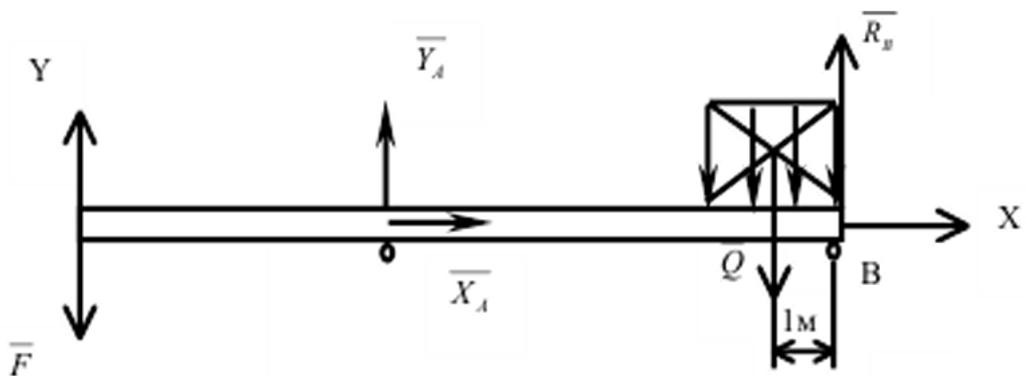


Рисунок 1.8

На балку діють активні сили: зосереджена сила  $\bar{F}$  та розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ , яке еквівалентне зосередженій силі  $\bar{Q}$

$$\bar{Q} = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

Дію циліндричного шарніра А та рухомого В замінюємо їх реакціями  $\bar{Y}_A, \bar{X}_A, \bar{R}_B$  (рис. 1.8) Для врівноваженої системи сил  $\{F, X_A, Y_A, Q, R_B\} \infty 0$  запишемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \quad X_A = 0, \\ \sum m_A \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0, \\ \sum m_B \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Звідки отримуємо:  $R_B = 0,75 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 4,25 \text{ кН}$ ,  $X_A = 0$ .

Достовірність отриманих результатів можна перевірити записавши ще одне рівняння:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \quad -F + Y_A - Q + R_B = 0, \\ -3 + 4,25 - 2 + 0,75 &= 0. \end{aligned}$$

Відповідь:  $R_B = 0,75 \text{ кН}$ ;  $Y_A = 4,25 \text{ кН}$ ;  $X_A = 0$ .

**Приклад 2:** Для консольної балки (рис. 1.9) знайти реакції жорсткого защемлення, якщо  $F = 2 \text{ кН}$ ,  $M = 5 \text{ кНм}$ .

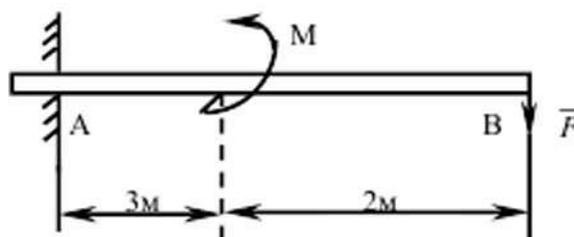


Рисунок 2.9

**Розв'язання:** На балку  $AB$  діють, активна сила  $F$ , пара сил з моментом  $M$ ; її руху перешкоджає в'язь - жорстке защемлення в точці  $A$ . Відкидаємо в'язь в точці  $A$ , і на підставі аксіоми звільнення від в'язей, її дію замінюємо силами  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  та моментом  $M_A$  (рис. 1.10).

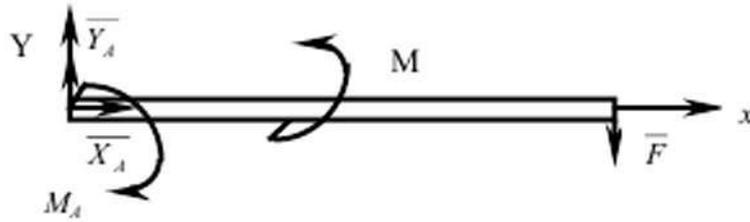


Рисунок 1.10

Запишемо умови рівноваги для системи сил  $\{\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{M}_A, M, \overline{F}\} \infty 0$ .

$$\sum F_x = 0; \quad X_A = 0;$$

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A - F = 0;$$

$$\sum m_A \overline{F} = 0; \quad -M_A + M - F \cdot 5 = 0.$$

Звідки знаходимо:

$$Y_A = F = 2 \text{кН},$$

$$M_A = M - 5 \cdot F = 5 - 5 \cdot 2 = -5 \text{кНм}.$$

**Відповідь:**  $X_A = 0$ ;  $Y_A = 2 \text{кН}$ ;  $M_A = -5 \text{кНм}$ .

## РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА №2.

### Тема:Визначення центра ваги плоских тіл

Плоска фігура, форма якої задасться на рисунках (2.1-2.5), має геометричні розміри, які визначаються параметрами  $a, b, c, d, t, n, h, l$  (розміри в сантиметрах). В фігурі виконано отвір, що має форму частини круга з радіусом  $R$ . Дільниця контура плоскої фігури з позначкою  $L$  має форму квадратної параболи  $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ .

Для заданої плоскої фігури визначити:

- а) аналітичний вигляд контуру  $L$ ;
- б) координати центра ваги в вибраній системі координат за допомогою розрахунків за відповідними формулами;
- в) координати центра ваги за допомогою експерименту, виготовивши макет фігури з паперу;
- г) похибку в відсотках між результатами аналітичних розрахунків і експерименту.

Значення розмірів взяти за варіантом з таблиці 2.1:

Таблиця 2.1

Варіант	A	b	c	d	h	l	m	n	R
1	6,4	3,6	2,4	2,6	2,8	1,8	3,2	2,0	1,4
2	7,0	4,8	3,0	4,2	2,6	3,0	4,1	3,6	1,0
3	7,3	5,0	3,2	3,5	3,5	3,1	3,2	4,0	1,2
4	6,9	3,6	2,5	5,0	4,3	2,6	2,8	4,6	1,3
5	7,4	4,2	2,4	2,8	2,0	2,8	3,9	2,5	0,8
6	8,2	3,7	3,0	3,6	2,9	3,2	2,8	6,3	1,4
7	6,5	4,5	2,7	3,0	2,2	2,5	3,3	4,8	1,0
8	8,0	4,8	2,5	3,4	3,0	1,9	3,6	5,9	1,5
9	7,8	3,9	2,6	2,9	2,8	2,0	3,0	4,2	1,2
0	8,5	4,5	2,8	4,0	3,2	2,7	2,9	3,5	0,9

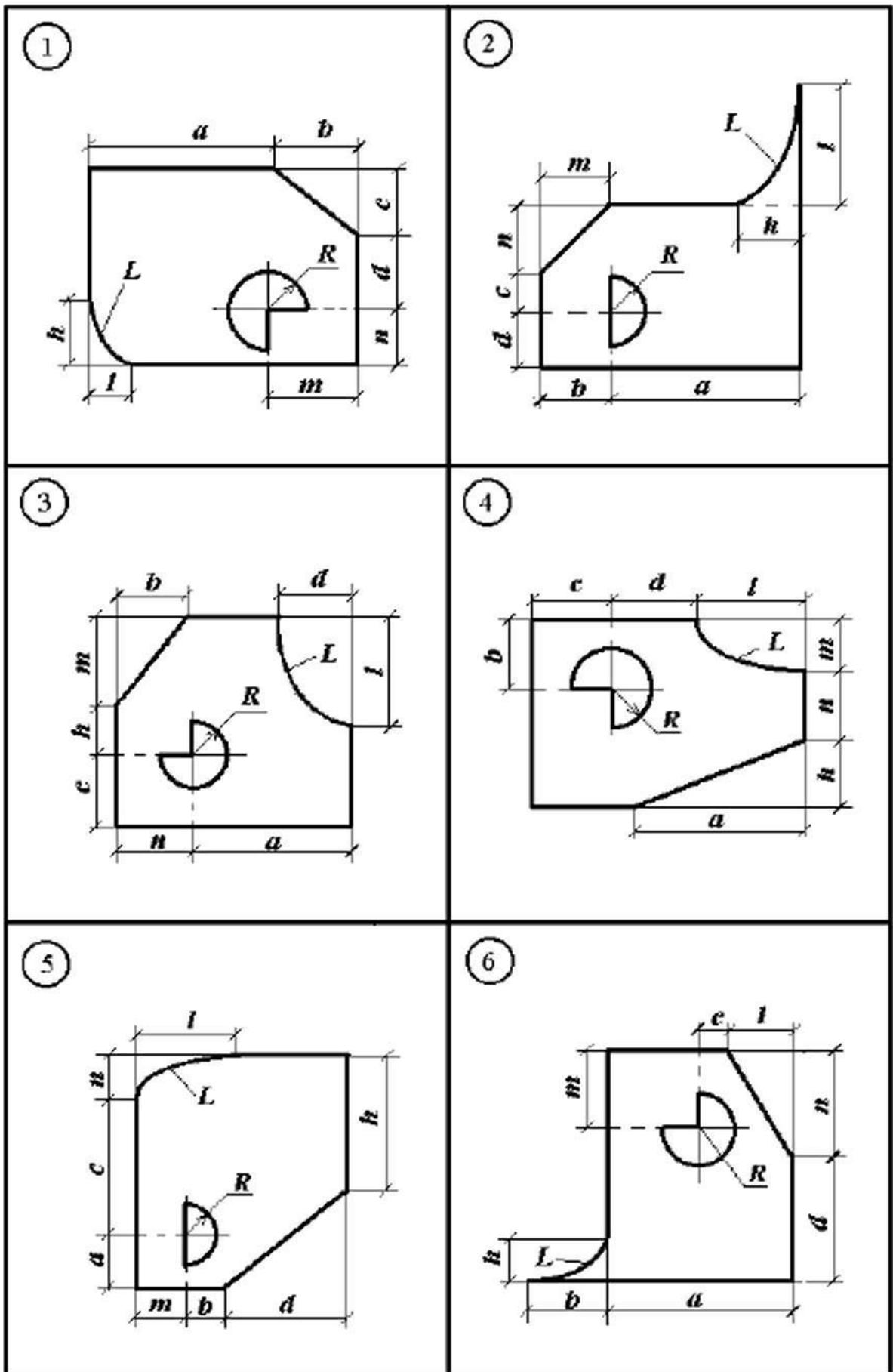


Рисунок 2.15

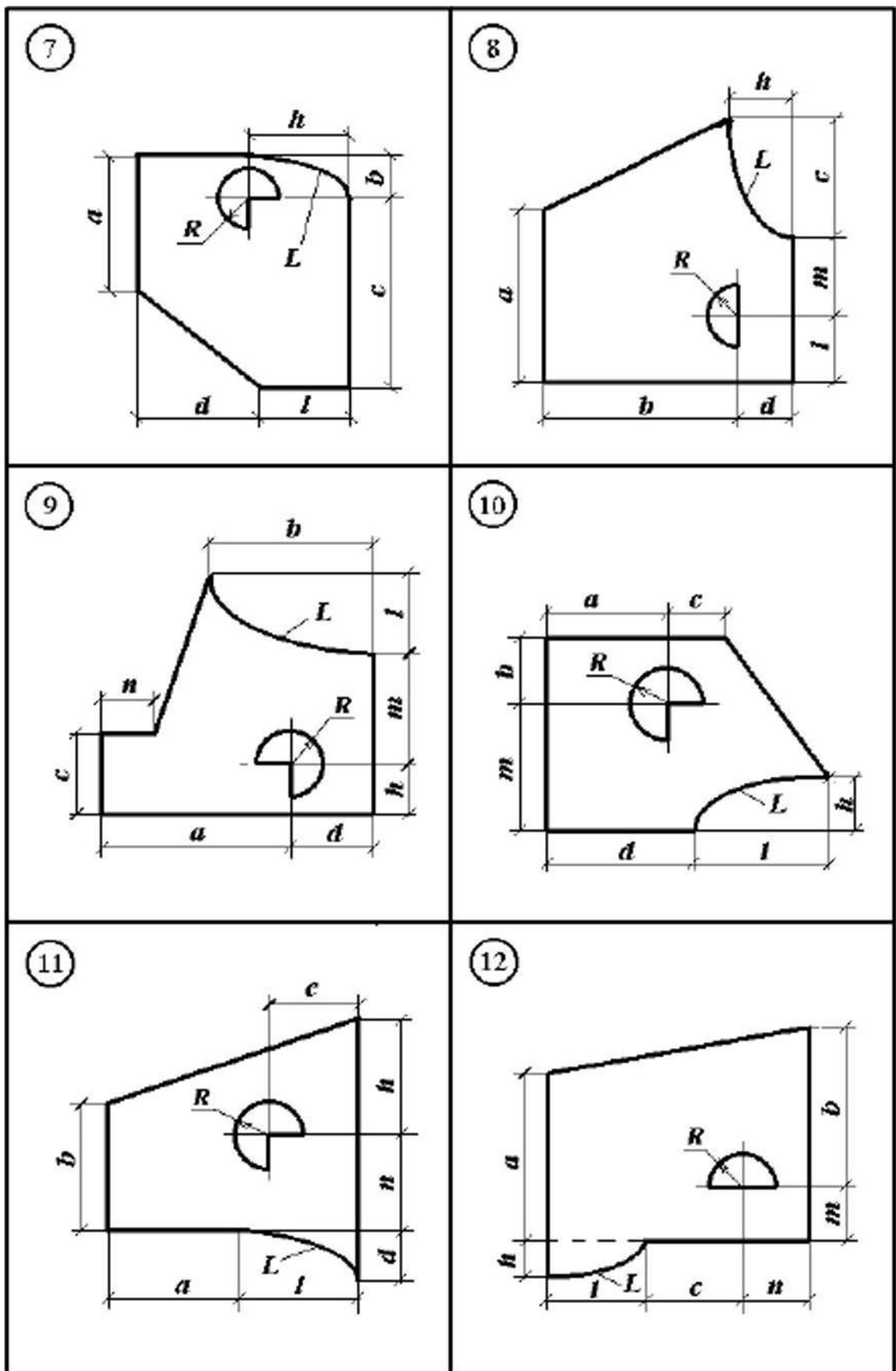


Рисунок 2.2

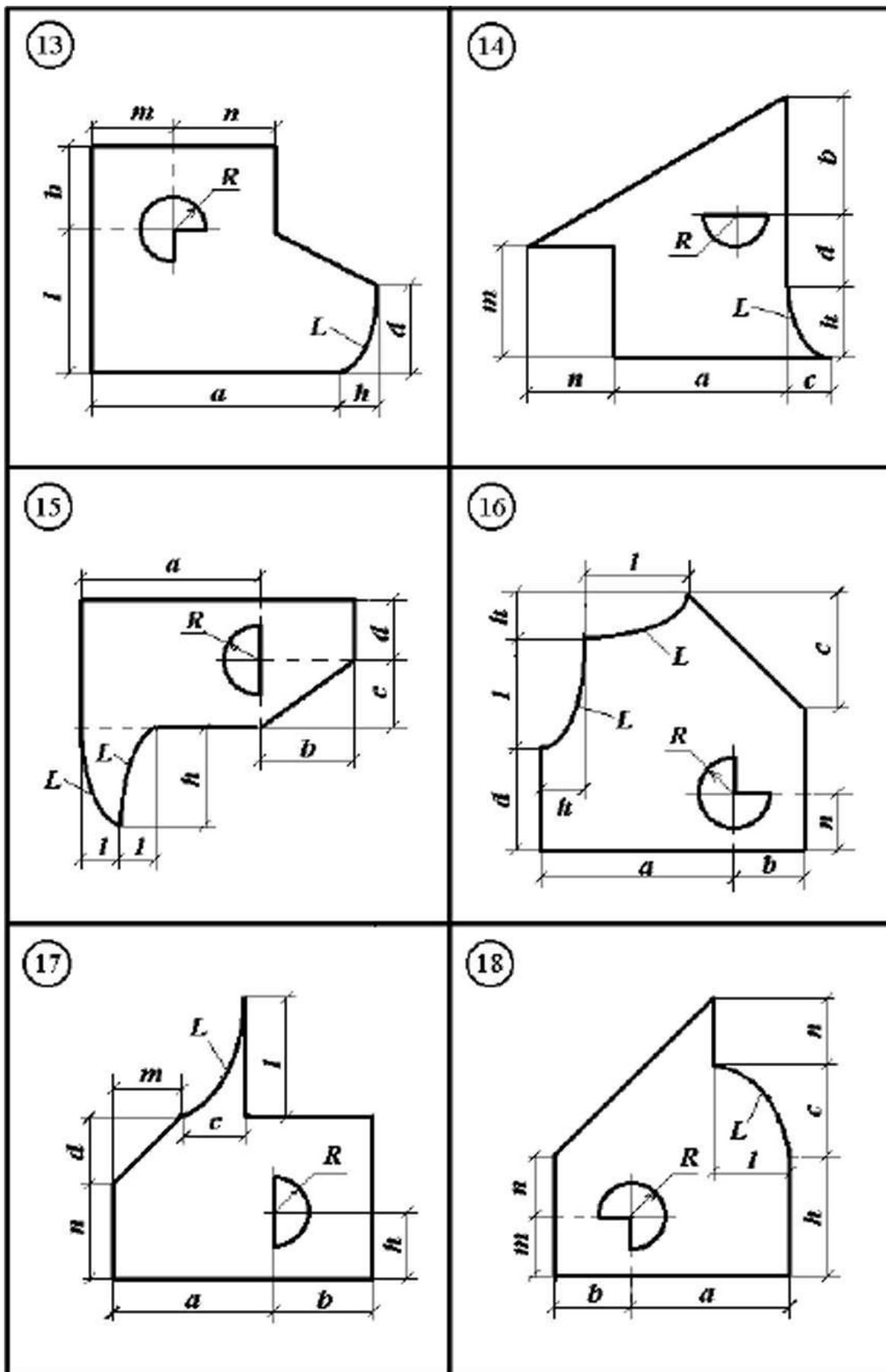


Рисунок 2.3

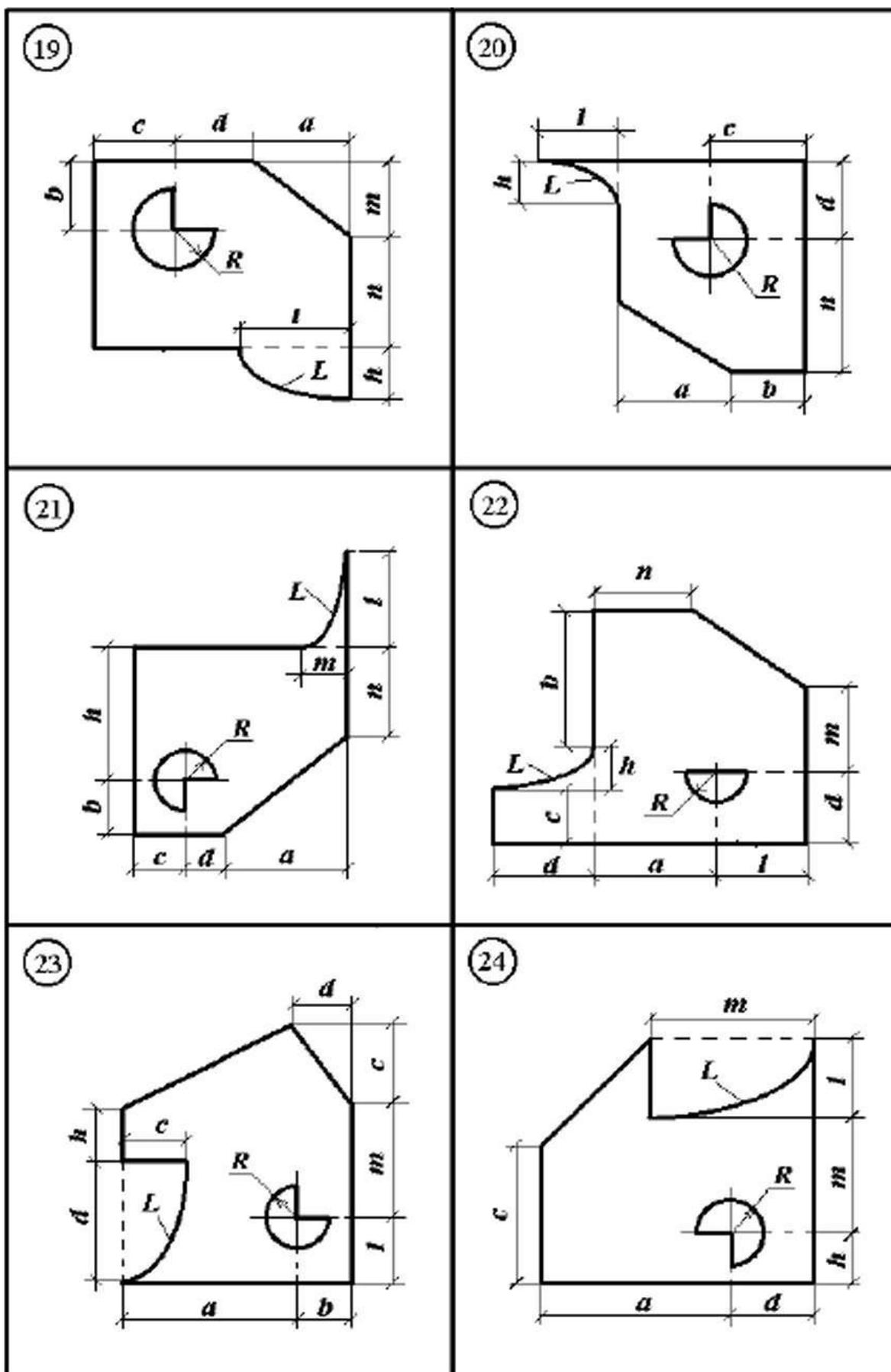


Рисунок 2.4

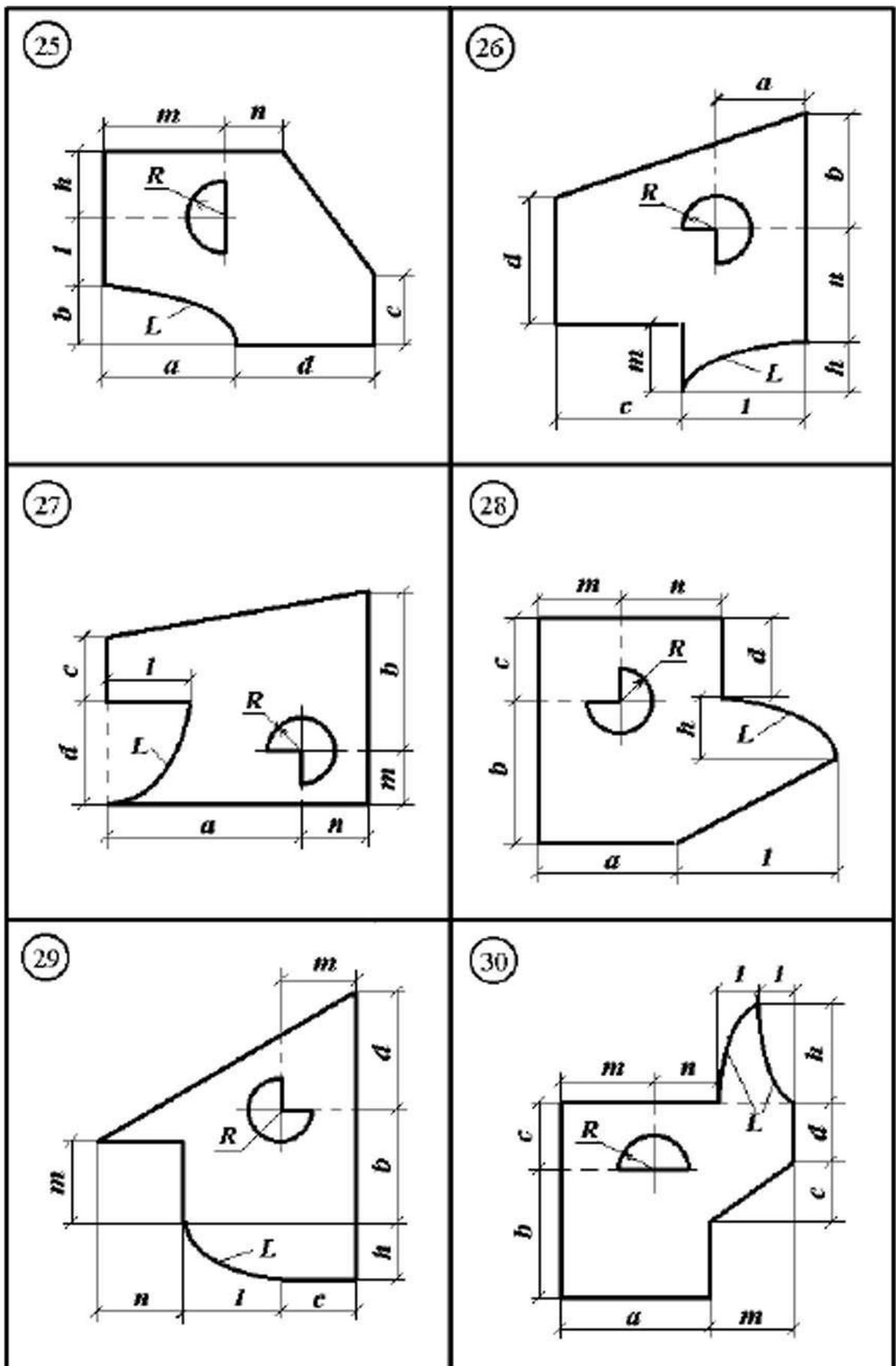


Рисунок 2.5

## 2.1 Приклад виконання завдання

На рис. 2.6 задана плоска фігура з розмірами в сантиметрах:  $a=4$ ,  $b=4$ ,  $c=6$ ,  $d=5$ ,  $m=3$ ,  $n=2,5$ ,  $h=3,6$ ,  $l=2,4$ , з якої вирізано отвір у вигляді півкруга радіусом  $R=1$ , а видалений контур  $L$  має форму квадратичної параболи  $y = A_1x^2 + A_2x + A_3$  з вершиною в точці  $K$ .

Визначити положення центра ваги заданої фігури згідно з пунктами 1 - 4, що містяться в умові завдання.

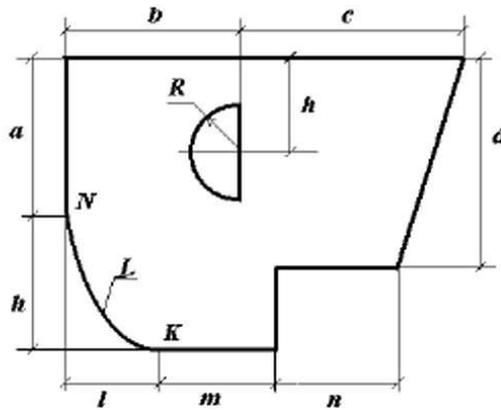


Рисунок 2.6

**Розв'язання:** Розташовуємо задану фігуру в системі координат  $xOy$ , як показано на рис. 2.7 Виділяємо в фігурі прості елементи і на кожному з них ставимо його номер: 1 - параболічний контур, 2 і 3 - прямокутники, 4 - трикутник, 5 - півкруг.

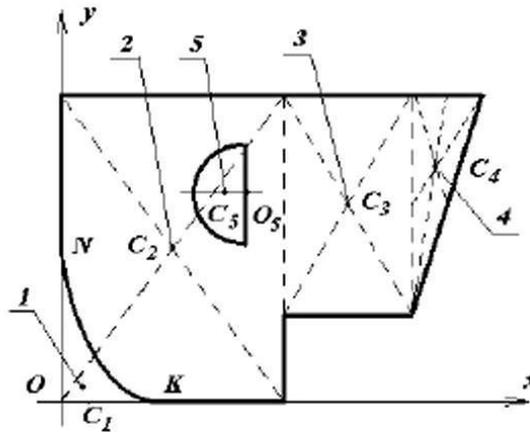


Рисунок 2.7

Визначаємо аналітичний вигляд параболи контуру  $L$ , який покажемо на рис. 2.8.

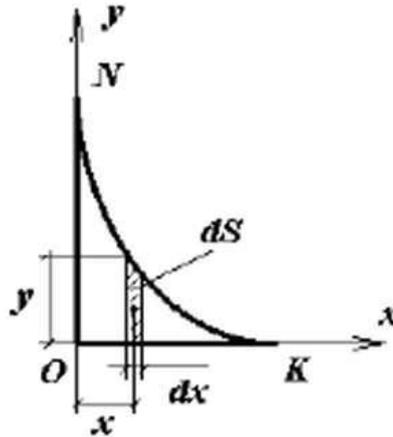


Рисунок 2.8

Положення крайніх точок параболи визначається розмірами:

$$OK = l, \quad ON = h.$$

Знайдемо коефіцієнти  $A_1$ ,  $A_2$  і  $A_3$  для параболи загального вигляду

$$y = A_1x^2 + A_2x + A_3. \quad (2.1)$$

Для параболи (8.1) виконуються умови:

- 1)  $y = h$  при  $x = 0$ ,
- 2)  $y = 0$  при  $x = l$ ,
- 3)  $dx/dy = 0$  при  $x = l$ .

Звідки отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} h &= A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + A_3, \\ 0 &= A_1 l^2 + A_2 l + A_3, \\ 0 &= 2A_1 l + A_2. \end{aligned}$$

Яка дає розв'язки:  $A_1 = h/l^2$ ,  $A_2 = -2h/l$ ,  $A_3 = h$ .  
Тоді контур  $L$  має такий аналітичний вигляд

$$y = hx^2/l^2 - 2hx/l + h = h(x/l - l)^2. \quad (2.2)$$

Знайдемо площу і координати центра ваги фігури, що обмежена координатними осями і контуром  $L$ . Площа фігури визначиться інтегралом

$$Sl = \int_0^l y dx = h \int_0^l (x/l - 1) 2 dx = hl/3. \quad (2.3)$$

Центр ваги фігури знаходиться в точці  $C_1$  з координатами  $x_1$  і  $y_1$ , які визначаються формулами:

$$x_1 = I_x / S_1, \quad y_1 = I_y / S_1, \quad (2.4)$$

де інтеграли  $I_x$  і  $I_y$  рівні:

$$I_x = \int_0^l x dS = \int_0^l x \cdot y \cdot dx = \int_0^l x \cdot h(x/l - 1)^2 dx = hl^2/12,$$

$$I_y = \int_0^l 0,5y^2 dS = 0,5 \int_0^l y^2 dx = 0,5h^2 \int_0^l (x/l - 1)^2 dx = h^2 \cdot l/10.$$

$$\text{Тоді } x_1 = I_x/S_1 = l/4, \quad y_1 = I_y/S_1 = 0,3h. \quad (2.5)$$

Визначаємо площі і координати центра ваги прямокутників під номерами 2 і 3

$$S_2 = (l + m) \cdot (a + h), \quad (2.6)$$

$$x_2 = (l + m)/2,$$

$$y_2 = (a + h)/2.$$

$$S_3 = n \cdot d,$$

$$x_3 = l + m + n/2, \quad (2.7)$$

$$y_3 = a + h - d/2.$$

Визначаємо площу і координати центра ваги трикутника 4

$$S_4 = 0,5 \cdot d \cdot (b + c - l - m - n),$$

$$x_4 = l + m + n + (b + c - l - m - n)/3, \quad (2.8)$$

$$y_4 = a + h - d/3.$$

Визначаємо площу і координати центра ваги півкруга 5

$$S_5 = 0,5 \cdot \pi R^2, \quad (2.9)$$

$$x_5 = b - O_5C_5.$$

Величину відрізка  $O_5C_5$ , див. рис. 2.7, знаходимо як центр ваги півкруга, що є сектором з центральним кутом рівним  $\pi$

$$O_5C_5 = 4R/(3\pi), \quad (2.10)$$

$$y_5 = a + h - h = a.$$

Координати центра ваги заданої фігури знайдемо за формулами:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}, \quad (2.11)$$

-де вилучені площі  $S_1$  і  $S_5$  ставимо з від'ємним знаком.

В формули (2.2), (2.3), (2.5)-(2.11) підставляємо дані задачі і знаходимо координати центра ваги пластини.

Площа  $S_1$  і координати центра  $X_1, Y_1$  фігури 1

$$Y = 0,625x^2 - 3x + 3,6,$$

$$S_1 = \int_0^b y \cdot dx = \int_0^{2,4} (0,625x^2 - 3x + 3,6) dx = 2,88 \text{ см}^2,$$

$$I_x = \int_0^l x \cdot dS = \int_0^l x \cdot y \cdot dS = \int_0^{2,4} x \cdot (0,625x^2 - 3x + 3,6) dx = 1,728 \text{ см}^3,$$

$$I_y = \int_0^l 0,5 \cdot y \cdot dS = 0,5 \int_0^l y^2 \cdot dS = 0,5 \int_0^{2,4} x \cdot (0,625x^2 - 3x + 3,6) dx = 3,1104 \text{ см}^3,$$

$$X_1 = \frac{I_x}{S_1} = \frac{1,728}{2,88} = 0,6 \text{ см},$$

$$Y_1 = \frac{I_y}{S_1} = \frac{3,1104}{2,88} = 1,08 \text{ см}.$$

Площі і координати центра ваги прямокутників під номерами 2 і 3

$$S_2 = (l + m) \cdot (a + h) = (2,4 + 3) \cdot (4 + 3,6) = 41,04 \text{ см}^2,$$

$$x_2 = (l + m) / 2 = (2,4 + 3) / 2 = 2,7 \text{ см},$$

$$y_2 = (a + h) / 2 = (4 + 3,6) / 2 = 3,8 \text{ см},$$

$$S_3 = nd = 2,55 = 12,5 \text{ см}^2,$$

$$x_3 = l + m + n/2 = 2,4 + 3 + 2,5/2 = 6,65 \text{ см},$$

$$y_3 = a + h - d/2 = 4 + 3,6 - 5/2 = 5,1 \text{ см}.$$

Площу і координати центра ваги трикутника 4

$$S_4 = 0,5 \cdot d \cdot (b + c - l - m - n) = 0,5 \cdot 5 \cdot (4 + 6 - 2,4 - 3 - 2,5) = 5,25 \text{ см}^2,$$

$$x_4 = l + m + n + (b + c - l - m - n) / 3 = 2,4 + 3 + 2,5 + (4 + 6 - 2,4 - 3 - 2,5) / 3 = 8,6 \text{ см},$$

$$y_4 = a + h - d / 3 = 4 + 3,6 - 5 / 3 = 5,93 \text{ см}.$$

Площу і координати центра ваги півкруга 5

$$S_5 = 0,5 \pi R^2 = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 1 = 1,57 \text{ см}^2,$$

$$x_5 = b - O_5 C_5.$$

$$O_5 C_5 = 4R / (3\pi) = 4 \cdot 1 / (3 \cdot 3,14) = 0,42 \text{ см},$$

$$x_5 = b - O_5 C_5 = 4 - 0,42 = 3,58 \text{ см},$$

$$y_5 = a + h - h = a = 4 \text{ см}.$$

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i},$$

$$x_c = (-2,88 \cdot 0,6 + 41,04 \cdot 2,7 + 12,5 \cdot 6,65 + 5,25 \cdot 8,6 - 1,57 \cdot 3,58) / (-2,88 + 41,04 + 12,5 + 5,25 - 1,57) = 231,73 / 54,34 = 4,26 \text{ см.}$$

$$y_c = (-2,88 \cdot 1,08 + 41,04 \cdot 3,8 + 12,5 \cdot 5,1 + 5,25 \cdot 5,93 - 1,57 \cdot 4) / 54,34 = 241,4441 / 54,34 = 4,44 \text{ см.}$$

# РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №3

## НА ТЕМУ: ДИНАМІКА ТОЧКИ

### ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об'єктів в залежності від сил, що діють на них.

Основні закони механіки (закони Галілея – Ньютона):

**1. Закон інерції.** Матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, поки дія інших тіл не змінить цей стан.

**2. Закон пропорційності сили та прискорення.** Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і однаково з нею напрямлене:  $m\vec{W} = \vec{F}$ .

**3. Закон рівності дії і протидії.** Сили взаємодії двох матеріальних точок однакові за величиною і протилежні за напрямом:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .

**4. Закон незалежності дії сил (принцип суперпозиції).** Декілька одночасно діючих на матеріальну точку сил надають точці таке ж прискорення, яке надала б їй одна сила, що дорівнює їх геометричній сумі.

Основне рівняння динаміки матеріальної точки:

$$m\vec{W} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k . \quad (1)$$

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на декартові осі:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}, \quad (2)$$

де  $m$  – маса точки;  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  - проекції прискорення на відповідні вісі

декартової системи координат;

а в проекціях на натуральні осі:

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{ks} \quad (3)$$

де  $\rho$  - радіус кривини траєкторії;  $\sum F_{k\tau}$ ;  $\sum F_{kn}$ ;  $\sum F_{ks}$  - суми проекцій всіх сил відповідно на дотичну, головну нормаль і бінормаль;  $\frac{dV}{dt} = W^\tau$  - тангенціальне (дотичне) прискорення точки;  $\frac{V^2}{\rho} = W^n$  - нормальне (доцентрове) прискорення точки.

### Дві основні задачі динаміки точки:

I (пряма) - за заданими рухом точки та її масою визначити сили, що діють на точку. Ця задача розв'язується шляхом диференціювання заданих рівнянь руху і підстановкою результатів у рівняння (2).

II (обернена) - за заданими масою і силами, діючими на точку, визначити закон (рівняння) руху точки. Ця задача розв'язується шляхом інтегрування диференціальних рівнянь руху точки.

Якщо при розв'язуванні другої задачі динаміки використовують диференціальні рівняння руху точки в координатній формі, то необхідно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (2).

При інтегруванні кожного рівняння руху точки одержуємо дві сталі. У загальному випадку маємо три диференціальних рівняння другого порядку, тобто при подвійному інтегруванні одержуємо шість сталих інтегрування, що визначаються за початковими умовам.

Задати початкові умови руху матеріальної точки - означає вказати положення точки та її швидкість в початковий момент часу:  $t = t_0$ ; початкове положення точки характеризується трьома координатами -  $x_0, y_0, z_0$ , початкова швидкість визначається трьома проекціями швидкості на координатні осі -  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ .

## ПОРЯДОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ

1. Складаємо розрахункову схему:

- а) зображуємо матеріальну точку в поточний момент часу на ділянці руху;
- б) показуємо всі активні сили, які діють на точку, і реакції в'язей;
- в) вибираємо систему координат. Найчастіше вибирають декартову систему координат; при цьому початок координат слід помістити в початковому положенні точки (на початку ділянки), а осі спрямувати в напрямки її руху (вісь  $X$  - вздовж ділянки, вісь  $Y$  - перпендикулярно до неї). Якщо точка рухається по колу, то рекомендується вибирати натуральні осі, приєднавши їх до рухомої точки і спрямувавши дотичну до траєкторії за швидкістю точки, а головну нормаль - у бік ввігнутості траєкторії по радіусу кривини ділянки.

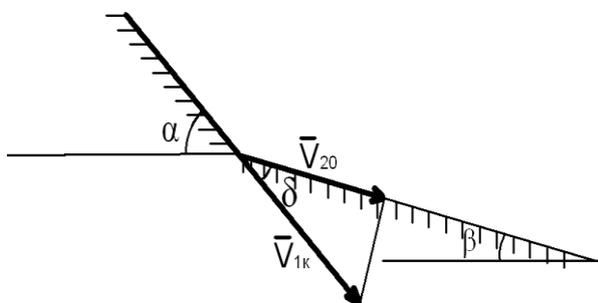
2. Складаємо основне рівняння динаміки і проектуємо його на вибрані осі. При цьому проекції всіх сил необхідно виразити через змінні, від яких ці сили залежать.

3. Зінтегруємо двічі здобуті диференціальні рівняння руху.

2. Довільні сталі інтегрування визначаємо за допомогою початкових умов руху точки на кожній з ділянок руху.

Початковою швидкістю на кожній наступній ділянці профілю є кінцева швидкість попередньої ділянки. Якщо під час переходу тіла на наступну

ділянку спостерігається заломлення траєкторії, то за початкову швидкість беруть проекцію кінцевої швидкості попередньої ділянки на вісь даної ділянки (рис. 1):



$$\delta = \alpha - \beta,$$

$$v_{20} = v_{1k} \cos \delta.$$

Рис. 1

Введенням початкової швидкості точки враховується вплив на її рух сил, які діють на матеріальну точку до моменту часу, взятого за початковий (тобто на попередній ділянці).

5. Знайдені довільні сталі підставляємо в результат інтегрування диференціальних рівнянь руху точки. Після першого інтегрування дістаємо швидкість точки як функцію часу, після другого - рівняння руху точки (закон руху).

### ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Тіло вагою  $\vec{P}$  рухається з точки  $A_0$  з початковою швидкістю  $\vec{V}_0$  по ділянках вказаного профілю. На криволінійній ділянці радіуса  $R$  і при вільному польоті тіло не зазнає опору. На ділянці  $l_1$  діє сила тертя з коефіцієнтом  $f$ , на ділянці  $l_2$  – сила опору  $F_0 = kmV^2$ , пропорційна квадрату швидкості. На кожній ділянці визначити:

- 1) швидкість руху залежно від часу і координат, а на криволінійній ділянці – залежно від кута;
- 2) кінематичне рівняння руху;
- 3) швидкість в кінці ділянки;
- 4) час руху (за винятком криволінійної ділянки);
- 5) нормальний тиск  $N$  у точках ділянки.

При дослідженні вільного польоту додатково визначити:

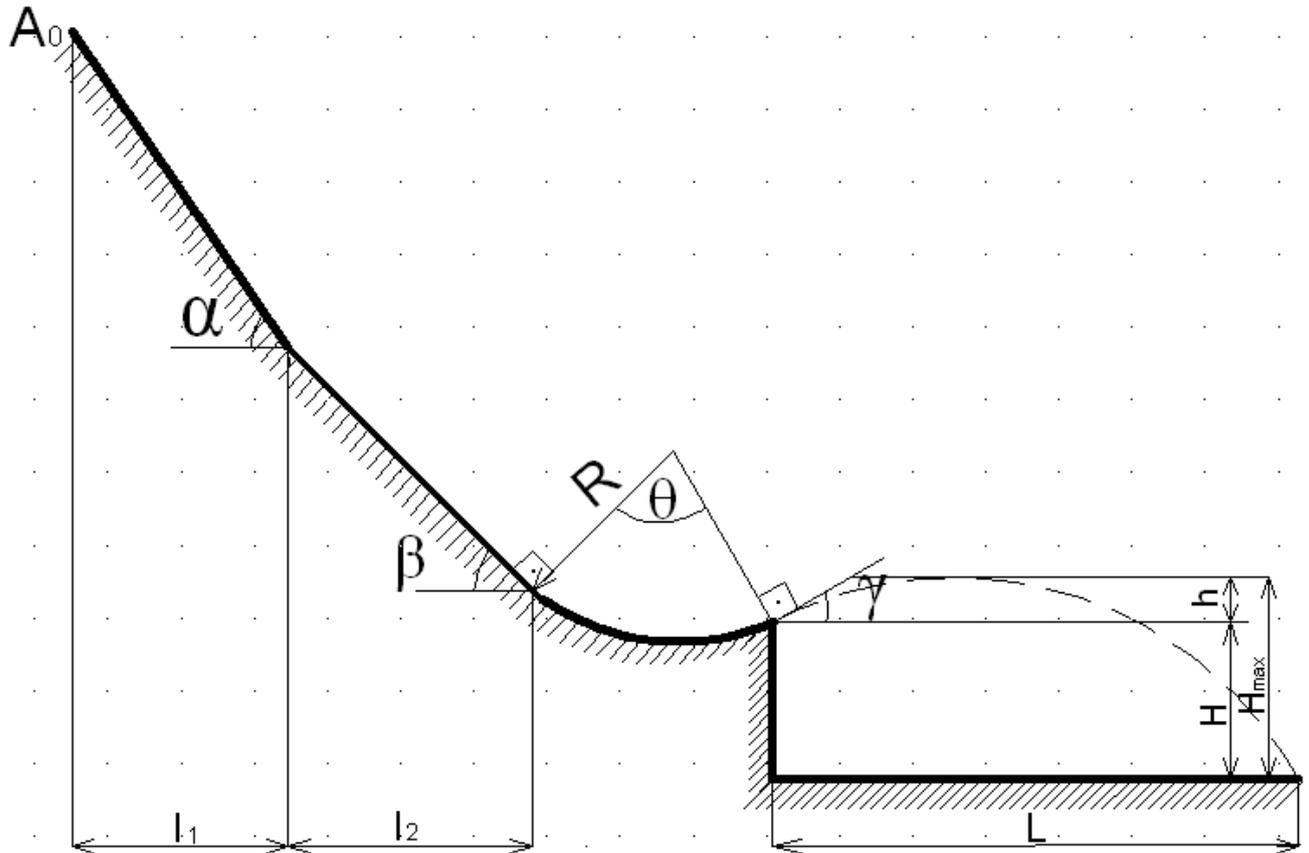
- 1) горизонтальну дальність польоту;
- 2) найбільшу висоту підйому;
- 3) рівняння траєкторії;

Після розв'язку завдання побудувати траєкторію точки і графік зміни швидкості залежно від координати  $X$  горизонтальної осі, проведеної з точки  $A_0$  праворуч.

Схема 0, варіант 0

$P$ , Н	$V_0$ , м/с	$f$	$k$ , 1/м	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$R$ , м	$H$ , м	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$\theta$ , град
8	7	0,1	0,05	11	20	12	10	55	45	60

Задана схема



### 3.1. Ділянка 1 (прямолінійний рух точки під дією сталих сил).

По шорсткій похилій поверхні, яка утворює кут  $\alpha$  з горизонтом піднімається матеріальна точка  $M$  вагою  $P = 8$  Н. У початковий момент часу її швидкість  $V_0 = 7$  м/с. Коефіцієнт тертя  $f = 0,1$ , кут  $\alpha = 55^\circ$ . Визначити закон руху точки, швидкість її в кінці ділянки довжиною  $l = 11$  м, час  $t$  руху по ділянці і нормальний тиск  $N$  у кінці ділянки (рис. 2).

Розв'язання 1. Складаємо розрахункову схему (вісь  $Ox$  спрямовуємо вздовж похилої площини за рухом точки, вісь  $Oy$  - перпендикулярно до неї, початок координат  $O$  розмістимо на початку ділянки;  $P$  – вага точки;  $N$  - нормальна реакція площини,  $F_{тр} = fN$  - сила тертя, напрямлена проти руху).

2. Складаємо основне рівняння динаміки (1)

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{mp}, \quad (4)$$

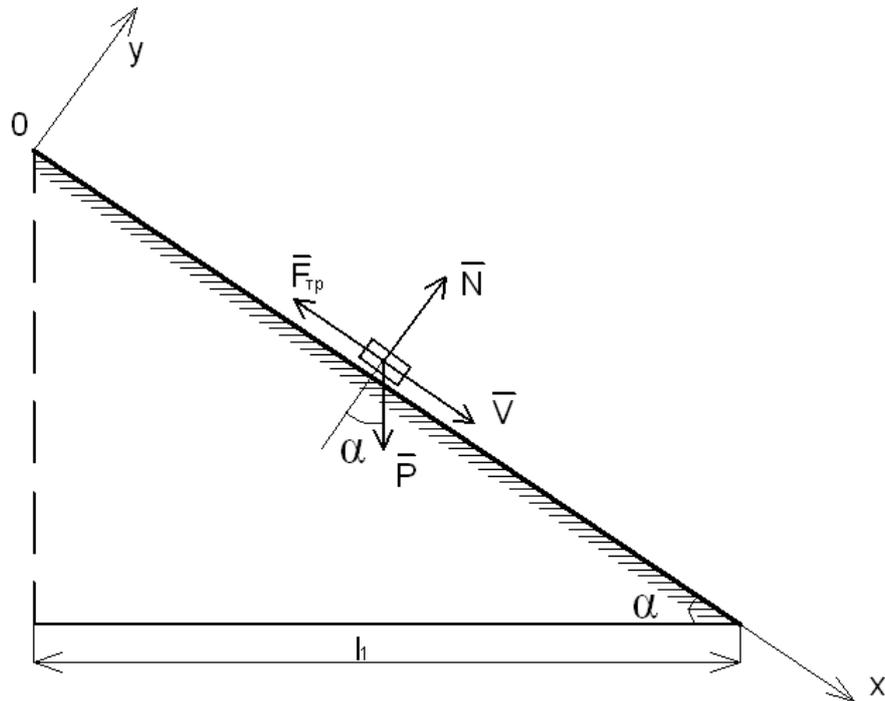


Рис. 2

а потім проектуємо на вибрані осі координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = P \sin \alpha - F_{\text{тр}}; & (5) \\ m\ddot{y} = P \cos \alpha + N; & (6) \end{cases}$$

Оскільки точка рухається вздовж осі  $Ox$ , її прискорення напрямлене вздовж цієї осі і проекція його на вісь  $Oy$  дорівнює нулю (тобто  $\ddot{y} = w_y = 0$ ).

Тому з рівняння (6) дістаємо

$$N = P \cos \alpha = 8 \cdot \cos 55^\circ = 4,42 \text{ Н.}$$

Тоді сила тертя  $F_{mp} = fP \cos \alpha = fmg \cos \alpha$ .

Після підстановки в рівняння (5) сили тертя і ділення на масу точки  $m$  маємо ( $\ddot{x} = W_x = \frac{dV}{dt}$ ):

$$\frac{dV}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 9,81 \cdot (\sin 55^\circ - 0,1 \cdot \cos 55^\circ) = 7,49 = A.$$

(7)

Для спрощення записів позначили праву частину рівняння (7), яка є сталою величиною, буквою  $A$ .

3. Інтегруємо диференціальне рівняння (7) поділивши змінні  $V$  та  $t$ . Тоді

$$\int dV = \int g(\sin\alpha - f \cos\alpha) dt = \int A dt; \quad (8)$$

$$V = g(\sin\alpha - f \cos\alpha)t + C_1 = At + C_1.$$

Інтегруємо вдруге (маючи на увазі, що  $V = v_x = \frac{dx}{dt}$ ):

$$\frac{dx}{dt} = At + C_1;$$

$$\int dx = \int A t dt + \int C_1 dt; \quad (9)$$

$$x = A \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

4. Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначаємо за допомогою початкових умов руху точки:  $t=0, x_0=0, \dot{x}_0 = V_0$ .

Підставляючи значення початкових умов у (8) і (9), дістаємо

$$C_1 = V_0; \quad C_2 = 0.$$

5. Знайдені значення  $C_1$  і  $C_2$  підставляємо в результати інтегрування диференціальних рівнянь руху, тобто в рівняння (8) та (9).

Отже, рівняння руху точки  $x=f_1(t)$  і рівняння її швидкості  $V=f_2(t)$  остаточно мають вигляд:

$$x = A \frac{t^2}{2} + V_0 t = g(\sin\alpha - f \cos\alpha) \frac{t^2}{2} + V_0 t; \quad (10)$$

$$V = At + V_0 = g(\sin\alpha - f \cos\alpha)t + V_0. \quad (11)$$

6. Час  $t$  руху по ділянці визначаємо, підставляючи  $x = \frac{\ell_1}{\cos\alpha}$  в рівняння (10). Дістаємо квадратне рівняння відносно  $t$ , розв'язуючи яке, знаходимо його корені  $t_1$  і  $t_2$ :

$$\frac{\ell_1}{\cos\alpha} = A \frac{t^2}{2} + V_0 t;$$

або

$$A \frac{t^2}{2} + V_0 t - \frac{\ell}{\cos \alpha} = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 4 \frac{A}{2} \left(-\frac{\ell_1}{\cos \alpha}\right)}}{2 \frac{A}{2}} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 2 \cdot 7,49 \frac{11}{\cos 55^\circ}}}{7,49} = \frac{-7 \pm 18,4}{7,49};$$

$$t_1 = 1,52 \text{ с.} \quad t_2 = -3,39 \text{ с.}$$

Як бачимо,  $t_2$  від'ємне, тому суперечить фізичному змісту задачі.

Щоб визначити швидкість точки в кінці ділянки, підставляємо значення  $t_1$  в рівняння (11):

$$V_1 = 7,49 \cdot 1,52 + 7 = 18,4 \text{ м/с.}$$

Примітка. Оскільки рух точки є прямолінійним і рівноприскореним (що видно з рівняння (7)), то здобути такі самі результати можна простіше, використавши відомі з кінематики рівняння для визначення швидкості й переміщення при рівнозмінному прямолінійному русі точки.

### 3.2. Ділянка 2 (прямолінійний рух точки під дією сили, яка залежить від швидкості)

По гладкій похилій площині, яка утворює кут  $\beta = 45^\circ$  з горизонтом, спускається матеріальна точка А вагою  $P = 8 \text{ Н}$ , зазнаючи опір середовища, пропорційний квадрату швидкості тіла  $F_c = kmV^2$  (де  $m$  - маса тіла,  $k = 0,05$  - коефіцієнт пропорційності).

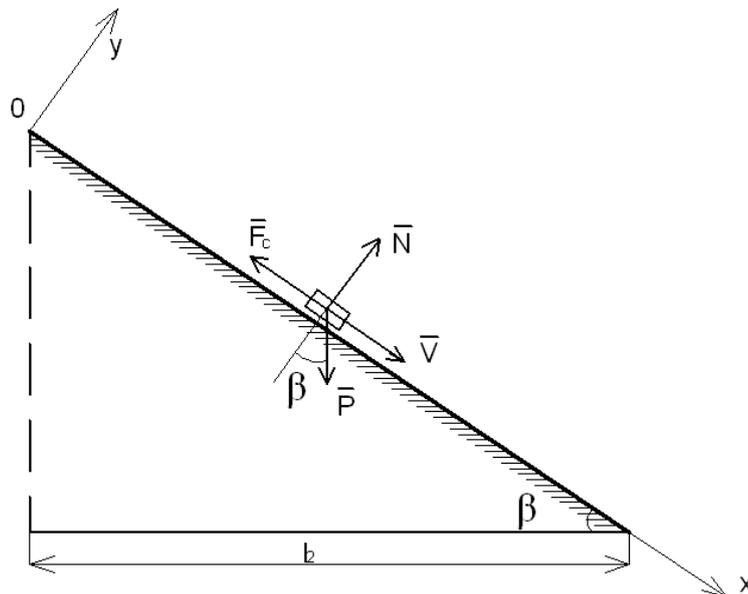


Рис. 3.

При переході точки з першої на другу ділянку спостерігається заломлення траєкторії, тому початкова швидкість точки на другій ділянці

$$V_{20} = V_{1k} \cos(\alpha - \beta) = 18,4 \cos(55^\circ - 45^\circ) = 17,8 \text{ м/с.}$$

Визначити час руху і швидкість точки в кінці ділянки довжиною  $l_2 = 20$  м.

Розв'язання. 1. Складаємо розрахункову схему (вісь  $Ox$  спрямуємо вздовж похилої поверхні за рухом точки;  $\vec{N}$  - нормальна реакція;  $\vec{F}_c$  - сила опору середовища, яка напрямлена проти руху) (рис. 3).

2. Складаємо диференціальне рівняння руху точки у векторній формі

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_c,$$

а потім проектуємо його на осі координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dV_x}{dt} = P \sin \beta - F_c; \\ m \frac{dV_y}{dt} = N - P \cos \beta. \end{array} \right. \quad (12)$$

$$(13)$$

Рівняння (13) можна використати для визначання  $N$  (оскільки  $W_y = \frac{dV_y}{dt} = 0$ ):

$$N = P \cos \beta = 8 \cdot 0,707 = 5,65 \text{ Н.}$$

Підставивши в рівняння (12)  $F_c = kmV^2$  і скоротивши його на масу  $m$ , знаходимо

$$\frac{dV_x}{dt} = g \sin \beta - kV_x^2 = -k(V_x^2 - \frac{g}{k} \sin \beta). \quad (14)$$

3. Поділивши змінні в рівнянні (14), попередньо позначивши для скорочення записів,

$$a^2 = \frac{g}{k} \sin \beta = \frac{9,81}{0,05} \sin 45^\circ = 138,7$$

і зінтегрувавши (маючи на увазі, що  $V_x = V$ )

$$\int \frac{dV}{V^2 - a^2} = -k \int dt,$$

дістанемо

$$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{V-a}{V+a} \right| = -kt + C_1. \quad (15)$$

4. Визначаємо сталу інтегрування за допомогою підстановки в рівняння (15) початкових умов: при  $t_0 = 0$ ,  $V = V_0$ .

$$C_1 = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{V_0 - a}{V_0 + a} \right|.$$

Підставимо знайдене значення  $C_1$  в рівняння (15) і знаходимо:

$$\frac{1}{2a} \left( \ln \left| \frac{V-a}{V+a} \right| - \ln \left| \frac{V_0-a}{V_0+a} \right| \right) = -kt;$$

або

$$\ln \left| \frac{(V-a)(V_0+a)}{(V+a)(V_0-a)} \right| = -2akt. \quad (16)$$

Потенціюємо рівняння (16):

$$\frac{(V-a)(V_0+a)}{(V+a)(V_0-a)} = e^{-2akt}.$$

Звідси знаходимо швидкість точки залежно від часу:

$$V = a \frac{(V_0+a) + (V_0-a)e^{-2akt}}{(V_0+a) - (V_0-a)e^{-2akt}}. \quad (17)$$

5. Оскільки визначити кінцеву швидкість із рівняння (17), не знаючи часу руху, неможливо, знайдемо рівняння для визначення швидкості точки залежно від пройденої нею відстані  $V = f(x)$ . Для цього помножимо дві частини рівняння (14) на  $2dx$ :

$$2dV_x \frac{dx}{dt} = -2k(V_x^2 - a^2)dx.$$

Звідси, зважаючи на те, що  $V_x = \frac{dx}{dt}$ , дістаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\int \frac{2VdV}{V^2 - a^2} = -2k \int dx$$

і після інтегрування

$$\ln(V^2 - a^2) = -2kx + C_2. \quad (18)$$

Сталу інтегрування  $C_2$  знаходимо з рівняння (18) за допомогою початкових умов (при  $t_0 = 0$ ;  $x_0 = 0$ ;  $V = V_0$ ):

$$C_2 = \ln(V_0^2 - a^2).$$

Підставляємо знайдене значення  $C_2$  в рівняння (18):

$$\ln(V^2 - a^2) - \ln(V_0^2 - a^2) = -2kx,$$

$$\ln \frac{V^2 - a^2}{V_0^2 - a^2} = -2kx.$$

Потенціюємо останнє рівняння і знаходимо швидкість як функцію переміщення

$$\frac{V^2 - a^2}{V_0^2 - a^2} = e^{-2kx};$$

$$V = \sqrt{a^2 + (V_0^2 - a^2)e^{-2kx}}. \quad (19)$$

Швидкість на кінці ділянки визначаємо, підставивши

$$x = \frac{l}{\cos \beta} = \frac{20}{0,707} = 28,2 \text{ м}$$

в рівняння (19)

$$V_{2k} = \sqrt{138,7 + (17,8^2 - 138,7)e^{-2 \cdot 0,05 \cdot 28,2}} = 12,2 \text{ м/с.}$$

6. Щоб визначити час руху тіла по ділянці, підставляємо в рівняння (16) знайдене значення кінцевої швидкості  $V_{2k}$ :

$$t_k = \frac{1}{2ak} \ln \frac{(V_0 - a)(V_k + a)}{(V_0 + a)(V_k - a)}; a = \sqrt{138,7} = 11,8 \text{ с;}$$

$$t_k = \frac{1}{2 \cdot 11,8 \cdot 0,05} \ln \frac{(17,8 - 11,8)(12,2 + 11,8)}{(17,8 + 11,8)(12,2 - 11,8)} = 2,12 \text{ с.}$$

### 3.3. Ділянка 3 (криволінійний рух невідомої точки)

Матеріальна точка  $M$  вагою  $P = 8 \text{ Н}$  рухається під дією сили ваги по внутрішній поверхні гладенького циліндра радіуса  $R = 12 \text{ м}$ . У початковий момент часу кут  $\varphi_0 = 45^\circ$  і швидкість точки була  $V_{30} = V_{2k} = 12,2 \text{ м/с}$ . Визначити швидкість точки і нормальний тиск на поверхню циліндра в кінці ділянки, якщо кут  $\theta = 60^\circ$ .

**Розв'язання.** 1. Складаємо розрахункову схему (вибираємо натуральні осі так, як рекомендовано в п. 1, розд. 2. Приєднуємо натуральні осі до точки М, яка знаходиться в поточному положенні. Дотичну  $\tau$  проводимо за

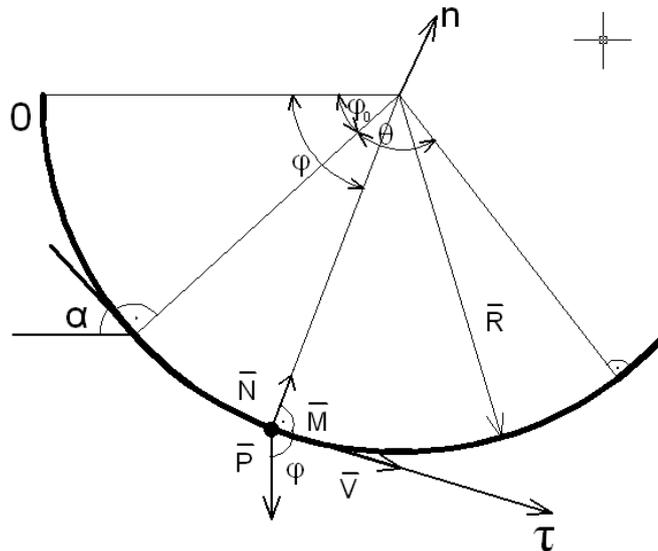


Рис. 4

рухом точки, нормаль  $n$  - по радіусу (рис. 4)).

Якщо криволінійна ділянка є  $i$ -тою ділянкою профіля, то початковий кут визначається так:  $\varphi = 90^\circ - \alpha$ , де  $\alpha$  - кут похилу попередньої ділянки. На точку діє сила  $\vec{P}$  і нормальна реакція  $\vec{N}$  гладенької поверхні.

2. Складаємо основне рівняння динаміки в векторній формі  $m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N}$  і проектуємо його на натуральні осі:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dV}{dt} = \sum F_k \tau = P \cos \varphi; \\ m \frac{V^2}{R} = \sum F_{kn} = N - P \sin \varphi. \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{V^2}{R} = \sum F_{kn} = N - P \sin \varphi. \end{array} \right\} \quad (21)$$

Оскільки вихідне диференціальне рівняння (20) має три змінні ( $V$ ,  $\varphi$ ,  $t$ ), перетворимо його. Для цього помножимо обидві його частини на  $d\varphi$  і після ділення на  $m$  здобудемо

$$dV \frac{d\varphi}{dt} = g \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Ураховуючи, що  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{V}{R}$ , дістаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

3. Зінтегруємо здобуте рівняння:

$$\int V dV = Rg \int \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{V^2}{2} = Rg \sin \varphi + C.$$

Сталу інтегрування  $C$  знаходимо за допомогою початкових умов

$t_0 = 0, \varphi = \varphi_0, V = V_0$ :

$$\frac{V_0^2}{2} = Rg \sin \varphi_0 + C; \quad C = \frac{V_0^2}{2} - Rg \sin \varphi_0.$$

4. Звідси 
$$\frac{V^2}{2} = Rg \sin \varphi + \frac{V_0^2}{2} - Rg \sin \varphi_0,$$

а швидкість точки

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2Rg(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}. \quad (22)$$

Швидкість її в кінці ділянки (при  $\varphi_k = \varphi_0 + \theta = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ )

$$V_k = \sqrt{V_0^2 + 2Rg[\sin(\varphi_0 + \theta) - \sin \varphi_0]} = \sqrt{12,2^2 + 2 \cdot 12 \cdot 9,81(0,966 - 0,707)} = 14,5 \text{ м/с.}$$

Нормальну реакцію  $N$  визначимо з рівняння (21).

При  $V = V_k, \varphi_k = \varphi_0 + \theta$  одержимо

$$N = \frac{mV_k^2}{gR} + P \sin(\varphi_0 + \theta) = \frac{8 \cdot 14,5^2}{9,81 \cdot 12} + 8 \cdot 0,966 = 22 \text{ Н.}$$

5. Щоб визначити закон руху точки по траєкторії, необхідно рівняння (22) зінтегрувати другий раз, враховуючи, що

$$V = \frac{ds}{dt}, \quad \varphi = \frac{S}{R}.$$

Тоді після ділення змінних матимемо

$$\int \frac{ds}{\sqrt{V_0^2 + 2Rg(\sin \frac{S}{R} - \sin \varphi_0)}} = \int dt$$

Інтеграл, який стоїть у лівій частині, в елементарних функціях не виражається і може бути приблизно знайдений одним із чисельних методів.

### 3.4. Ділянка 4 (криволінійний рух вільної точки)

Матеріальна точка вагою  $P = 8 \text{ Н}$ , кинута з висоти  $H = 10 \text{ м}$  з початковою швидкістю  $V_{40} = V_{3k} = 14,5 \text{ м/с}$  під кутом  $\gamma = 15^\circ$  до горизонту, рухається під впливом сили тяжіння. Знайти рівняння траєкторії руху тіла, горизонтальну дальність польоту, час польоту і швидкість у кінці ділянки, а також максимальну висоту підйому точки.

Розв'язання. I. Складаємо розрахункову схему (вибираємо декартові осі тому що траєкторії в явному вигляді немає; початок координат вибираємо в початковій точці польоту; вектор початкової швидкості  $\vec{V}_0$  напрямлений по дотичній до профіля попередньої ділянки (рис. 5)).

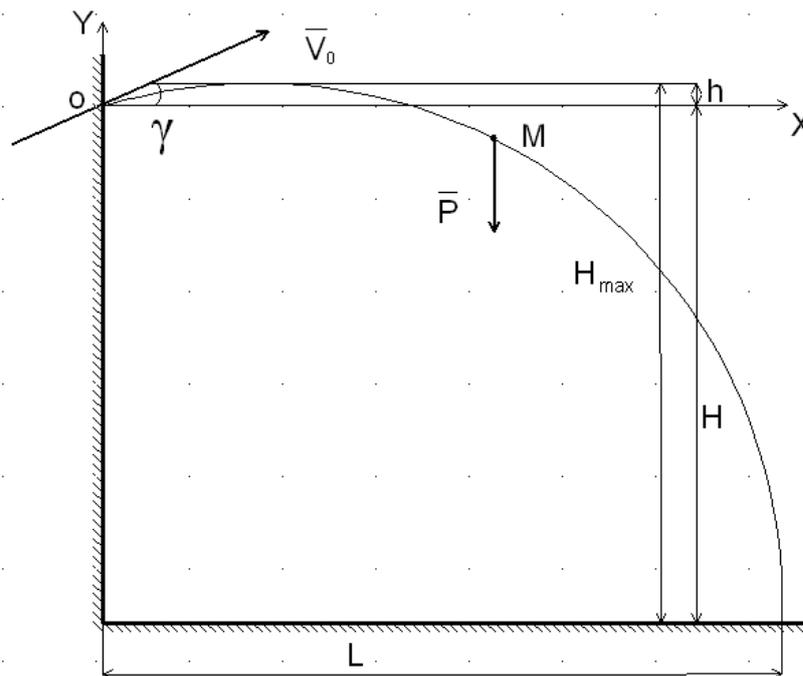


Рис. 5.

2. Складаємо диференціальне рівняння руху точки у векторній формі

$$m\vec{W} = \vec{P} \quad \text{і в проекціях на вибрані осі:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dV_x}{dt} = 0; \\ m \frac{dV_y}{dt} = -mg; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} dV_x = 0; \\ dV_y = -gdt. \end{array} \right. \quad (23)$$

3. Інтегруючи систему рівнянь (23) двічі, дістаємо залежність швидкості точки від часу та параметричні рівняння руху:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = C_1; \\ V_y = gt + C_2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int dx = C_1 \int dt; \\ \int dy = -g \int t dt + C_2 \int dt; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = C_1 t + C_3; \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \end{array} \right. \quad (24)$$

4. Сталі інтегрування  $C_1, C_2, C_3, C_4$  знаходимо, підставивши в систему рівнянь (24) початкові умови

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad V_{x0} = V_0 \cos \gamma; \\ y_0 = 0, \quad V_{y0} = V_0 \sin \gamma. \end{array} \right.$$

Здобудемо:  $C_1 = V_0 \cos \gamma; C_2 = V_0 \sin \gamma; C_3 = C_4 = 0$ .

5. Після підстановки  $C_1$  і  $C_2$  одержуємо формулу для визначення швидкості точки в проекціях на осі

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \cos \gamma; \\ V_y = V_0 \sin \gamma - g t. \end{array} \right. \quad (25)$$

Відповідно модуль швидкості  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ .

Параметричні рівняння руху:

$$x = V_0 \cos \gamma t; \quad (26)$$

$$y = V_0 \sin \gamma t - \frac{gt^2}{2}. \quad (27)$$

6. Рівняння траєкторії дістанемо, виключивши час в рівнянь (26) і (27):

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \gamma};$$

$$y = V_0 \sin \gamma \frac{x}{V_0 \cos \gamma} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \gamma} = 0,268x - \frac{9,81 \cdot x^2}{2 \cdot 14,5^2 \cdot 0,965^2}; \quad (28)$$

$y = 0,268 x - 0,025 x^2$  – це рівняння параболи.

7. Час і дальність польоту знайдемо, підставивши в рівняння (26) і (27)

$$x = L, y = -H, t = T:$$

$$-H = V_0 \sin \gamma T - g \frac{T^2}{2}.$$

Звідси час руху

$$T_{1,2} = \frac{1}{g} [V_0 \sin \gamma \pm \sqrt{V_0^2 \sin^2 \gamma + 2gH}] = \frac{1}{9,81} [14,5 \cdot 0,259 \pm \sqrt{14,5^2 \cdot 0,259^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 10}];$$

$$T_1 = 1,86 \text{ с}; T_2 = -1,1 \text{ с}.$$

Підставивши знайдене додатнє значення  $T_1$  в рівняння (26), визначимо дальність польоту

$$x = L = V_0 \cos \gamma T_1 = 14,5 \cdot 0,966 \cdot 1,86 = 26,1 \text{ м}.$$

8. Швидкість точки в кінці польоту

$$V_{4k} = \sqrt{(14,5 \cdot 0,966)^2 + (14,5 \cdot 0,259 - 9,81 \cdot 1,86)^2} = 20,2 \text{ м/с}.$$

9. Визначаємо максимальну висоту  $H$  підйому точки .

В найвищому положенні точки  $V_y = 0$ . Підставляючи  $V_y = 0$  в рівняння (25) визначаємо час найбільшого підйому точки

$$t_{екст} = \frac{V_0 \sin \gamma}{g} = \frac{14,5 \sin 150^\circ}{9,81} = 0,382 \text{ с},$$

а згідно з рівняння (27) висота її підйому дорівнює

$$h_{екст} = V_0 \sin \gamma t_{екст} - \frac{gt_{екст}^2}{2} = 14,5 \sin 15^\circ \cdot 0,382 - \frac{9,81 \cdot 0,382^2}{2} = 0,71 \text{ м}..$$

Тоді

$$H_{max} = H + h_{екст} = 10 + 0,71 = 10,7 \text{ м}.$$

При цьому координата, яка відповідає найбільшому підйому точки згідно з рівнянням (26), буде:

$$X_{екстр} = V_0 \cos \gamma t = 14,5 \cos 15^\circ \cdot 0,382 = 5,35 \text{ м}.$$

Для перевірки скористаємось рівнянням траєкторії руху точки (28)

$$0 = 0,27 - 2 \cdot 0,025 X_{екстр},$$

звідки

$$X_{екстр} = \frac{0,27}{0,05} = 5,4 \text{ м} \approx 5,35 \text{ м}.$$

### 3.5. Приклад побудови графіка швидкостей

Для побудови графіка швидкостей розглянемо залежності між координатами та швидкостями тіла на кожній ділянці.

$$\text{Ділянка I} \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (x_1 = \frac{x}{\cos\alpha}).$$

Для визначення швидкості в залежності від координати скористаємося виразом (7)

$$\frac{dV}{dt} = A.$$

Помножимо ліву і праву частини записаного рівняння на  $dx_1$  і приймаючи до уваги, що  $\frac{dx_1}{dt} = V$ , проінтегруємо  $VdV = A dx_1$ :

$$\frac{V^2}{2} = Ax_1 + C,$$

де  $C$  стала інтегрування, яку визначаємо із початкових умов:  $x_0 = 0$ ;  $V = V_0$ .

Підставляючи початкові умови, одержимо  $C = \frac{V_0^2}{2}$  і відповідно

$$V_1 = \sqrt{2Ax_1 + V_0^2}.$$

Визначаємо швидкість:

$$\text{при } x = 3\text{ м}; \quad x_1 = \frac{x}{\cos\alpha}:$$

$$V_1' = \sqrt{2 \cdot 7.49 \frac{3}{\cos 55^\circ} + 7^2} = 11,3 \text{ м/с};$$

$$\text{при } x = 6\text{ м}; \quad x_1 = \frac{x}{\cos\alpha}$$

$$V'' = \sqrt{2 \cdot 7.49 \frac{6}{\cos 55^\circ} + 7^2} = 14,3 \text{ м/с};$$

$$\text{при } x = l_1 = 11 \text{ м}; \quad x_2 = \frac{l_1}{\cos\alpha}$$

$$V_{1k} = \sqrt{2 \cdot 7.49 \frac{11}{\cos 55^\circ} + 7^2} = 18,4 \text{ м/с}.$$

Ділянка II  $l_1 \leq x \leq (l_1 + l_2), (x_2 = \frac{x - l_1}{\cos \beta})$ .

Для визначення швидкості в залежності від координати маємо рівняння (19):

$$V_2 = \sqrt{a^2 + (V_{20} - a^2)e^{-2kx_2}}$$

При  $x = l_1 + \frac{l_2}{4} = 12 + \frac{20}{4} = 17 \text{ м}; x_2 = \frac{l_2}{4 \cos \beta}$

$$V_2' = \sqrt{138,7 + (17,8^2 - 138,7) \cdot e^{-2 \cdot 0,05 \cdot \frac{20}{4 \cdot 0,707}}} = 15,6 \text{ м/с};$$

при  $x = l_1 + \frac{l_2}{2} = 12 + \frac{20}{2} = 22 \text{ м}; x_2 = \frac{l_2}{\cos \beta}$

$$V_2'' = \sqrt{138,7 + (17,8^2 - 138,7) \cdot e^{-2 \cdot 0,05 \cdot \frac{20}{2 \cdot 0,707}}} = 13,5 \text{ м/с};$$

при  $x = l_1 + l_2 = 12 + 20 = 32 \text{ м}; x_2 = \frac{l_2}{\cos \beta}$

$$V_{2k} = \sqrt{138,7 + (17,8^2 - 138,7) \cdot e^{-2 \cdot 0,05 \cdot \frac{20}{0,707}}} = 12,2 \text{ м/с}.$$

Ділянка III  $(90^\circ - \beta) \leq \varphi \leq (90^\circ - \beta + \theta)$

Швидкість визначаємо за формулою (22)

$$V_3 = \sqrt{V_{30}^2 + 2Rg(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}.$$

При  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\theta}{4} = 45^\circ + \frac{60^\circ}{4} = 60^\circ$  одержимо

$$V_3' = \sqrt{12,2^2 + 2 \cdot 12 \cdot 9,81(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ)} = 12,4 \text{ м/с};$$

при  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\theta}{2} = 45^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 75^\circ$

$$V_3'' = \sqrt{12,2^2 + 2 \cdot 12 \cdot 9,81(\sin 75^\circ - \sin 15^\circ)} = 14,5 \text{ м/с};$$

при  $\varphi = \varphi_0 + \theta$

$$V_{3k} = 14,5 \text{ м/с};$$

при  $\varphi = 90^\circ$

$$V_3''' = \sqrt{12,2^2 + 2 \cdot 12 \cdot 9,81(\sin 90^\circ - \sin 15^\circ)} = 14,8 \text{ м/с}.$$

Ділянка IV  $[l_1 + l_2 + l_3(\varphi)] \leq x \leq [l_1 + l_2 + l_3(\varphi) + l_4]$

Швидкість в залежності від координат визначаємо за формулами (25) та (26)

$$x_4 = V_o \cos \gamma t; \quad V_4 = \sqrt{V_{4x}^2 + V_{4y}^2};$$

$$V_{4x} = V_{40} \cos \gamma; \quad V_{4y} = V_{40} \sin \gamma - gt;$$

$$T = \frac{x}{V_o \cos \gamma}.$$

При  $x = l_1 + l_2 + l_3(\varphi) + \frac{l_4}{4} = 12 + 20 + 12 + \frac{26,1}{4} = 50,5 \text{ м}$

$$t = \frac{26,1}{4 \cdot 14,5 \cos 15^\circ} = 0,466 \text{ с},$$

$$V_4' = \sqrt{(14,5 \cos 15^\circ)^2 + (14,5 \sin 15^\circ - 9,81 \cdot 0,466)^2} = 14 \text{ м/с};$$

при  $x = l_1 + l_2 + l_3(\varphi) + \frac{l_4}{2} = 57,05 \text{ м}$

$$t = \frac{26,1}{2 \cdot 14,5 \cos 15^\circ} = 0,932 \text{ с},$$

$$V_4'' = \sqrt{(14,5 \cos 15^\circ)^2 + (14,5 \sin 15^\circ - 9,81 \cdot 0,932)^2} = 15 \text{ м/с};$$

при  $x_k = l_1 + l_2 + l_3(\varphi) + l_4 = 70,1 \text{ м}$

$$t = \frac{26,1}{14,5 \cos 15^\circ} = 1,86 \text{ с},$$

$$V_4''' = \sqrt{(14,5 \cos 15^\circ)^2 + (14,5 \sin 15^\circ - 9,81 \cdot 1,86)^2} = 20,2 \text{ м/с}.$$

По отриманим значенням будемо графік швидкості руху точки по ділянках профілю залежно від координат.

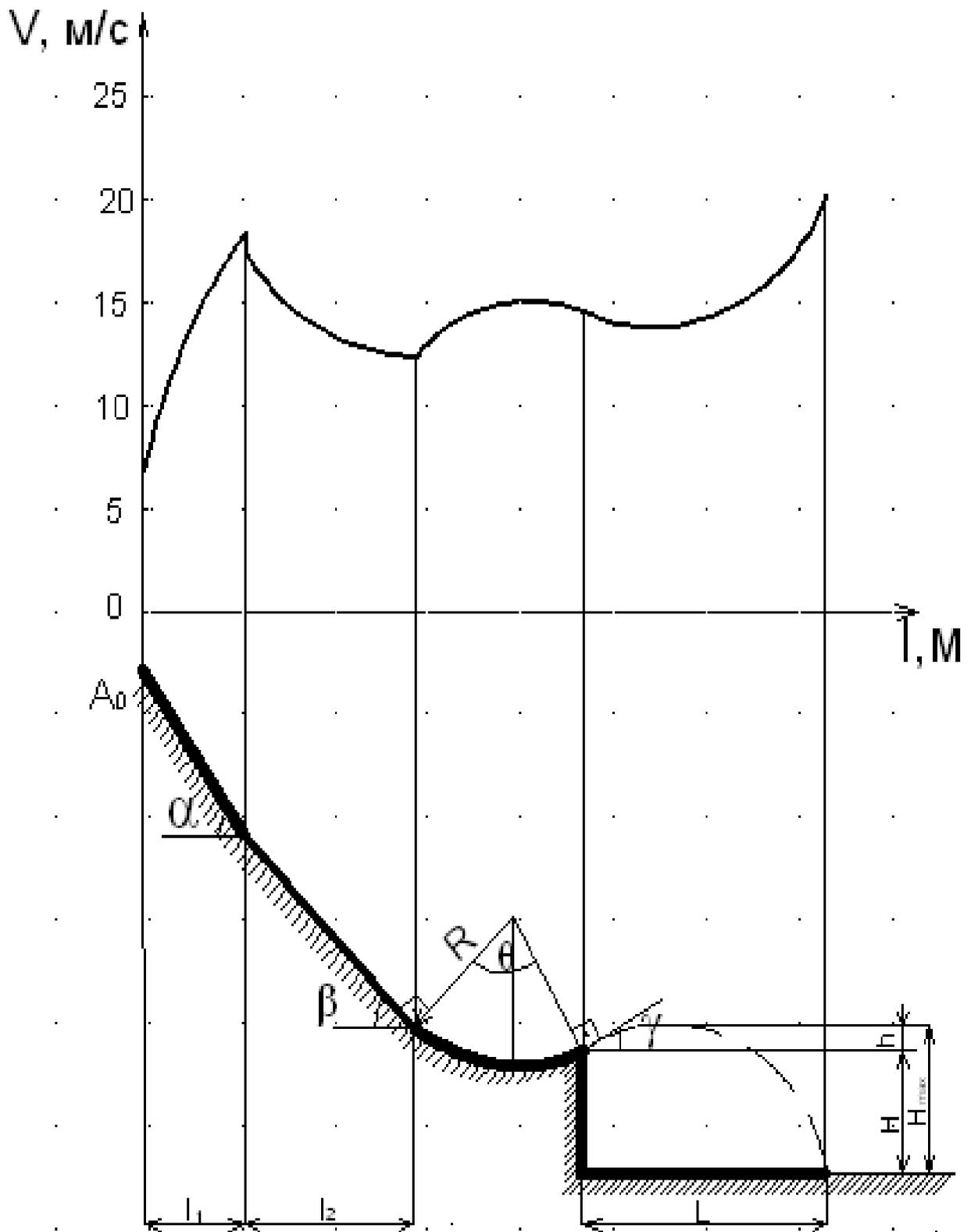


Рис.6

#### 4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №3

1. Сформулювати основні закони механіки (закони Ньютона),
2. Яку систему відліку називають інерціальною ?
3. Дайте визначення маси, матеріальної точки, сили.
4. У чому відмінність натуральної системи осей від декартової?
5. Запишіть диференціальне рівняння руху матеріальної точки в декартових координатах; у натуральному вигляді.
6. Сформулюйте дві основні задачі динаміки матеріальної точки. З допомогою яких математичних операцій вони розв'язуються?
7. Скільки сталих інтегрування входить у загальний розв'язок диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, якщо вона рухається:
  - а) уздовж прямої; б) на площині; в) у просторі?
8. Як визначаються сталі інтегрування?
9. Що таке початкові умови руху матеріальної точки?
10. Які особливості руху матеріальної точки під дією:
  - а) сталих сил; б) сил, які залежать від часу; в) сил, які залежать від швидкості точки?
11. Вкажіть положення точки на кожній ділянці профіля, на якому вона має найбільшу швидкість руху.
12. Як визначається дальність польоту точки на ділянці вільного польоту?

## 5. ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Матеріальна точка вагою  $P$  рухається з точки  $A_0$  з початковою швидкістю  $V_0$  по ділянках вказаного профілю. На криволінійній ділянці радіуса  $R$  і при вільному польоті точка не зазнає опору. На ділянці  $l_1$  діє сила тертя з коефіцієнтом  $f$ , на ділянці  $l_2$  – сила опору  $F_0 = kmV^2$ , пропорційна квадрату швидкості. На кожній ділянці визначити:

- 1) швидкість руху залежно від часу і координат, а на криволінійній ділянці – залежно від кута;
- 2) кінематичні рівняння руху;
- 3) швидкість на кінці ділянки;

- 4) час руху (за винятком криволінійної ділянки);
- 5) нормальний тиск  $N$  у точках ділянки.

При дослідженні вільного польоту додатково визначити:

- 1) горизонтальну дальність польоту;
- 2) найбільшу висоту підйому;
- 3) рівняння траєкторії;

Після розв'язку завдання побудувати траєкторію точки і графік зміни швидкості залежно від координати  $X$  горизонтальної осі, проведеної з точки  $A_0$  праворуч.

Схеми ділянок профілю взяти із рис. 7- 9, а числові дані із таблиці

Таблиця

Варіанти	$P, H$	$V_0, \text{ м/с}$	$f$	$k, 1/\text{м}$	$l_1, \text{ м}$	$R, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$H, \text{ м}$
1	10	3	0,1	0,05	20	8	14	20
2	7	4	0,25	0,12	15	8	5	18
3	3	2	0,20	0,10	20	12	10	16
4	5	5	0,15	0,08	15	14	10	20
5	2	0	0,35	0,10	10	10	4	14
6	4	10	0,3	0,16	20	10	8	20
7	6	2	0,2	0,14	30	10	15	15
8	8	5	0,25	0,06	2	15	12	10
9	10	4	0,1	0,02	20	8	12	15
10	12	5	0,15	0,08	18	15	10	18

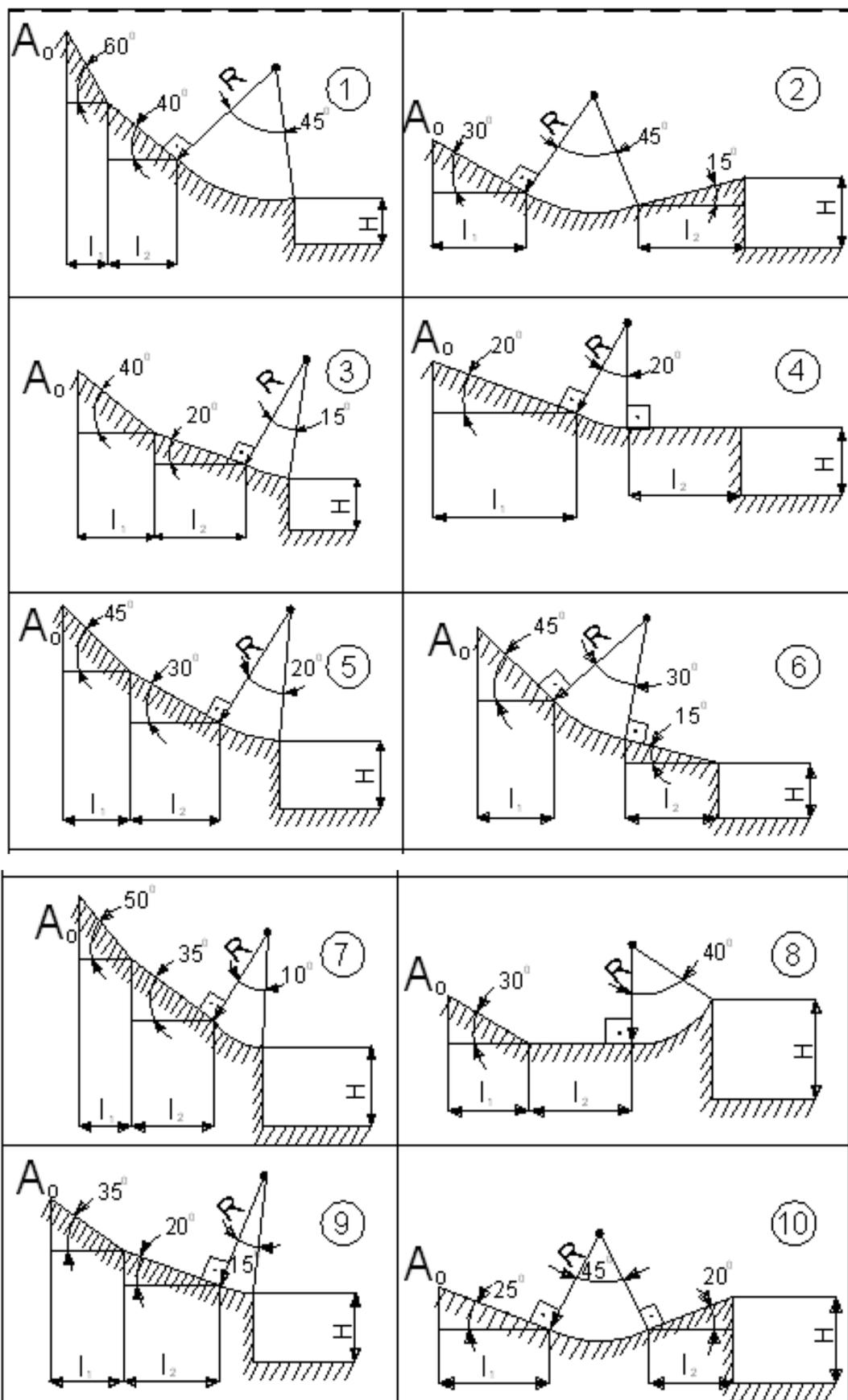


Рис. 7

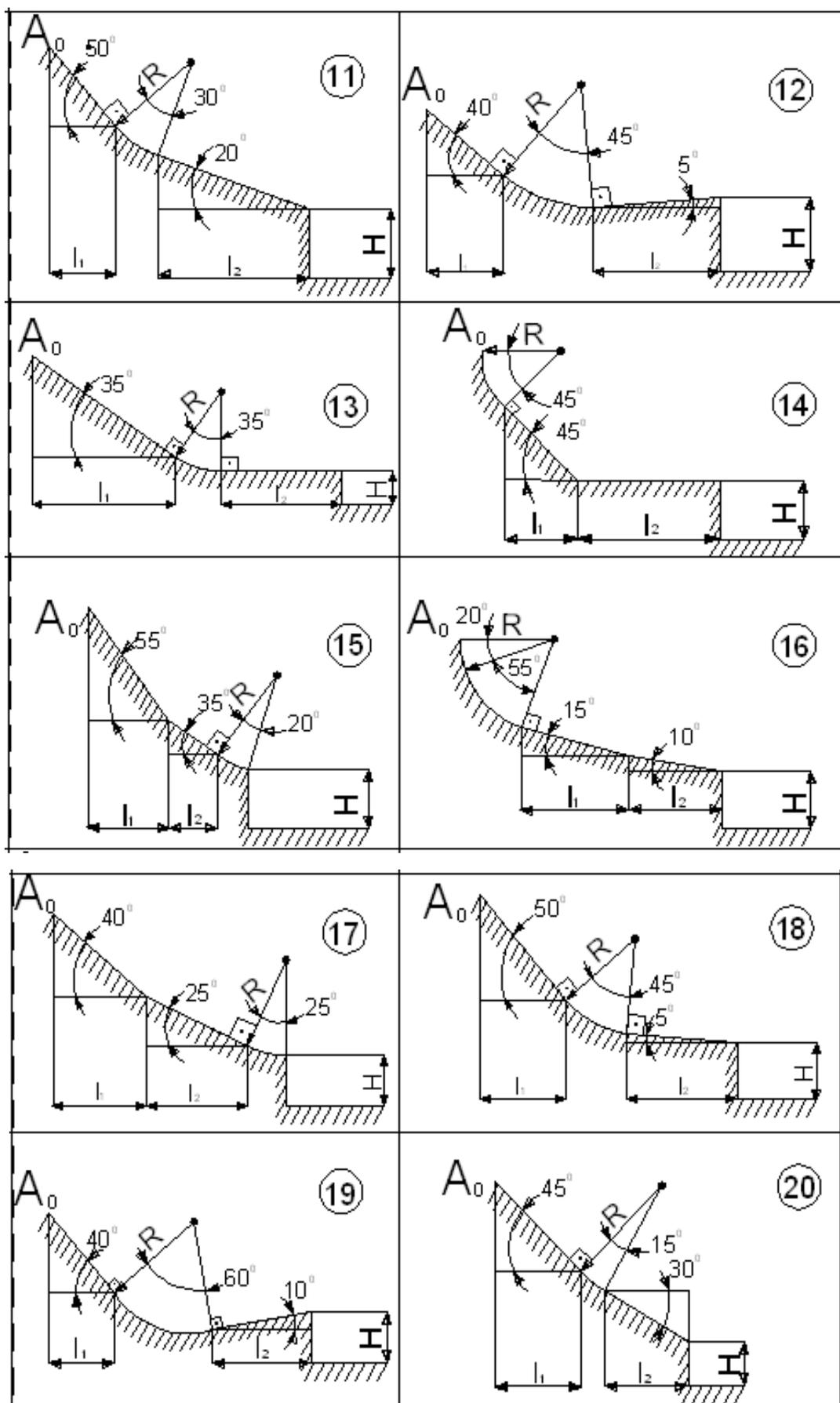


Рис.8

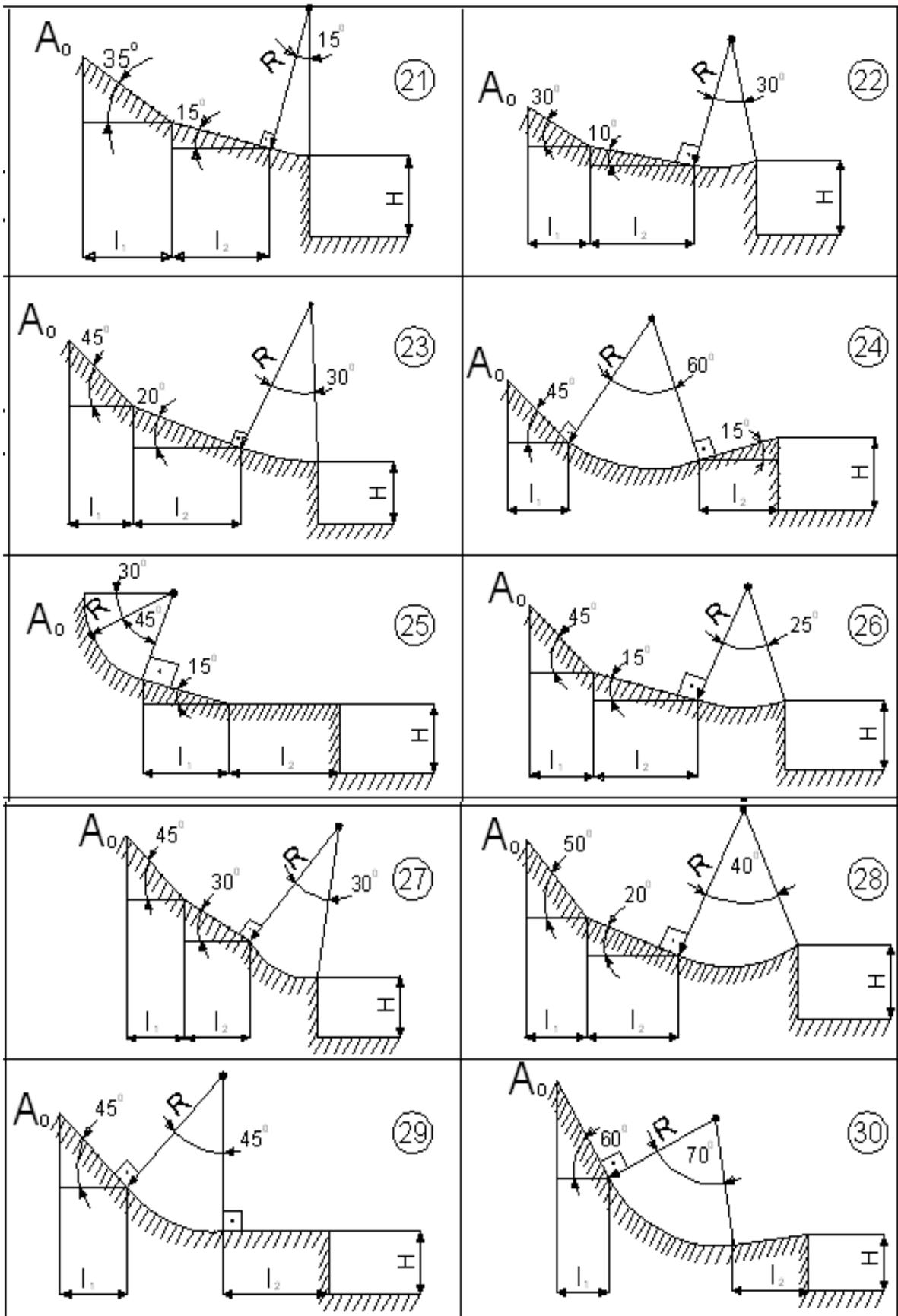


Рис. 9

## Література

1. Конспект лекцій з курсу теоретичної механіки. Статика / Уклад. В.О.Федотов, В.І. Степанчук. - Вінниця: ВПІ, 1991.-84с. Укр. мовою/.
2. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з розрахунку плоскої ферми за допомогою ЕОМ / Уклад. В.О. Приятельчук . - Вінниця: ВПІ, 1991.-32с. Укр. мовою/.
3. Методичні вказівки до розрахунку збірної конструкції для студентів бакалаврату спеціальностей Б-57, Б-33, Б-34 триступеневої підготовки спеціалістів з вищою інженерною освітою /Уклад. В.О. Приятельчук, І.Риндюк. Вінниця: ВДТУ, 1994.-32с. Укр. мовою/.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов /А.А. Яблонський, С.С. Норейко, А.Вольфсон, и др./ Под ред. А.А. Яблонського. -4-е изд. перераб. и доп. М.: ВШ, 1985.-367с.
5. Технічна механіка, кн.І. Теоретична механіка: Підручник/ Д.В.Чернілевський, Я.Т. Кіицький, В.М.Колосов та ін. За ред. Д.В.Чернілевського. - К.: НМК ВО, 1992. -384с.
6. Яблонський А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики.4.1. Статика. Кинематика. Учебник. Изд. 4-е перераб. М.: ВШ, 1971.-424с.

Теоретична механіка [Текст]: методичні вказівки до виконання розрахунково – графічних робіт для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» галузь знань 19 «Архітектура та будівництво» ОПП: «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн» ОПП «Будівництво та експлуатація будівель та споруд»/уклад. Я.В. Оласюк – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ», 2022. – 51 с

Комп'ютерний набір і верстка : Я.В. Оласюк  
Редактор: Я.В. Оласюк

Підп. до друку \_\_\_\_\_ 2022 р. Формат А5.  
Папір офіс. Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. \_\_\_\_\_  
Обл. вид. арк. \_\_\_\_\_ Тираж 15 прим.