

Міністерство освіти і науки України  
Відокремлений структурний підрозділ  
«Любешівський технічний фаховий коледж  
Луцького національного технічного університету»



## **Будівельна механіка**

### *Методичні вказівки до виконання самостійної роботи*

для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр  
освітньо-професійної програми Будівництво та експлуатація будівель і споруд  
спеціальності **192 Будівництво та цивільна інженерія**

( **G19 Будівництво та цивільна інженерія** )

галузь знань **19 Архітектура і будівництво**

( **G Інженерія, виробництво та будівництво** )

денної форми навчання

УДК 62 (07)  
Ш 71

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ»  
\_\_\_\_\_ Герасимик-Чернова Т.П.

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу  
Бібліотекар \_\_\_\_\_ Н.М. Корець

Затверджено методичною радою ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ»  
протокол № \_\_\_\_\_ від «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 р.

Рекомендовано до видання на засіданні випускної циклової (методичної) комісії  
педпрацівників будівельного профілю, будівництва та цивільної інженерії

протокол № \_\_\_\_\_ від «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 р.

Голова випускної циклової (методичної) комісії \_\_\_\_\_ Данилік С.М.

Укладач: \_\_\_\_\_ О.Ф. Шмаль, викладач вищої категорії

Рецензент: \_\_\_\_\_

Відповідальний за випуск: \_\_\_\_\_ Данилік С.М., викладач вищої категорії, голова  
випускної циклової (методичної) комісії педпрацівників будівельного профілю, будівництва та  
цивільної інженерії.

Будівельна механіка [Текст]: Методичні вказівки до виконання самостійної роботи для  
здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19  
Архітектура і будівництво спеціальності (G Інженерія, виробництво та будівництво) 192  
Будівництво та цивільна інженерія (G19 Будівництво та цивільна інженерія) освітньо-  
професійної програми Будівництво та експлуатація будівель і споруд денної форми навчання /  
уклад. О.Ф. Шмаль. – Любешів : ВСП «Любешівський технічний фаховий коледж Луцького  
НТУ», 2025. – 28 с.

Методичне видання складене відповідно до діючої програми курсу «Будівельна механіка»  
з метою вивчення та засвоєння основних розділів дисципліни, містить завдання до тем,  
питання та перелік рекомендованої літератури.

## Вступ

Методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія освітньо-професійної програми Будівництво та експлуатація будівель і споруд з метою поглибленої підготовки якості засвоєння одного з найскладніших розділів будівельної механіки, у якому розглядаються методи розрахунку статично визначених просторових систем.

Основною задачею роботи студентів над цією темою є придбання достатніх теоретичних знань і практичних умінь для розв'язку просторових ферм і рам.

Методичні вказівки містять розділи з кінематичного аналізу та методів розрахунку. У кожному розділі наведено основні теоретичні положення методів визначення внутрішніх зусиль та їх застосування на прикладах.

Для більш глибокого засвоєння матеріалу студентам пропонується виконати самостійну роботу з розрахунку просторової рами.

Дані методичні вказівки в значній мірі допоможуть студентам у роботі над цим розділом будівельної механіки, який у підручниках освітлений недостатньо, особливо з практичної точки зору.

# 1. Загальні поняття. Опори просторових систем. Кінематичний аналіз

Просторовою стержньовою називається система, осі стержнів якої та зовнішнє навантаження не знаходяться в одній площині. За характером утворення стержньові системи розподіляються на два види: ферми і рами (рис. 1.1)

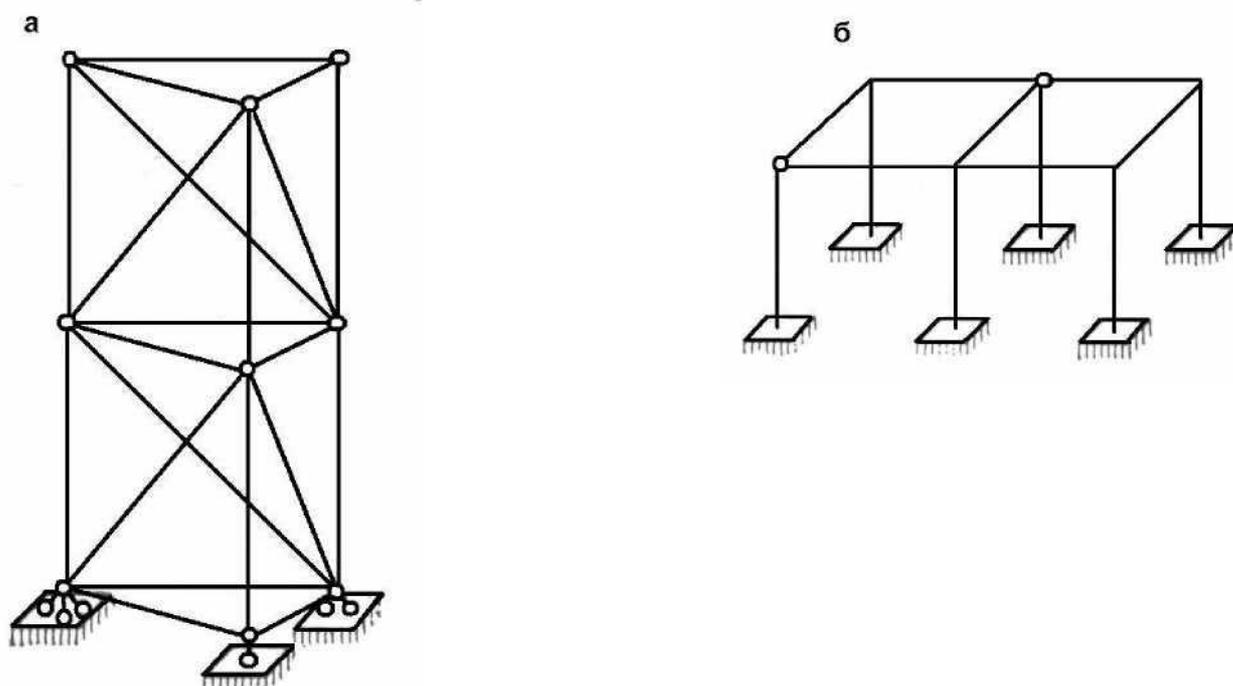


Рис.1.1. Просторова ферма (а) і просторова рама (б)

Стержні поєднуються у вузлах шарнірно або жорстко. У жорстких вузлах не відбувається взаємного повороту стержнів. Шарніри можуть бути кульовими і циліндричними (рис. 1.2). Кульовий шарнір дозволяє вільний поворот відносно усіх трьох осей, а циліндричний - тільки відносно однієї осі (припустімо, відносно осі  $y$ , рис. 1.2,б).



Рис. 1.2. Кульовий (а) і циліндричний (б) шарніри

Жорстке поєднання стержнів у вузлах, поряд із шарнірним, характерне для просторових рам. Стержні просторових ферм з'єднуються кульовими шарнірами. Вважається, що шарніри ідеальні, тобто допускають взаємний поворот стержнів без тертя.

Опори стержньових просторових систем розподіляються на чотири основних види.

Кульова плоско-рухома опора складається з двох гладких плит, між якими розташовується куля (рис.1.3,а). Така опора дозволяє системі повертатися відносно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , що проходять через центр ваги кулі, і переміщуватись у площині  $x$ ,  $y$ , але не дозволяє вертикального переміщення системи. Таким чином, опора накладає один зв'язок, у якому виникає вертикальна реакція  $R_z$ . Умовне позначення кульової плоско-рухомої опори показано на рис. 1.3,б.

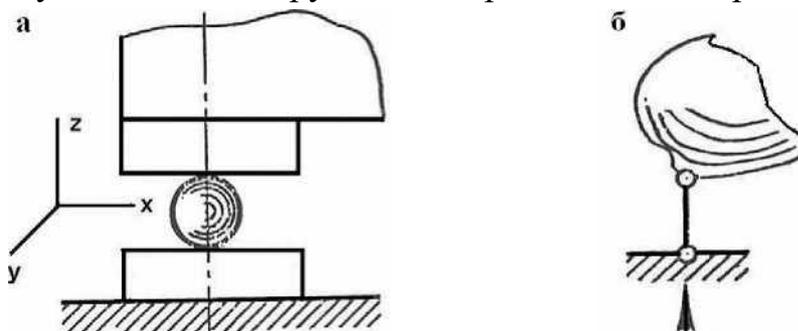


Рис.1.3. Кульова плоско-рухома опора (а), умовне зображення (б)

Кульова лінійно-рухома опора на циліндричних котках зображена на рис.1.4,а. Вона складається з двох балансирів і кулі, яка входить у заглиблення в них. Нижній балансир спирається на циліндричні котки, що лежать на плиті. У цьому балансири і в плиті маються реборди, які перешкоджають взаємному зміщенню вздовж осі котків. Система, закріплена такою опорою, може повертатися відносно трьох осей та переміщуватись поступально паралельно площині кочення котків.

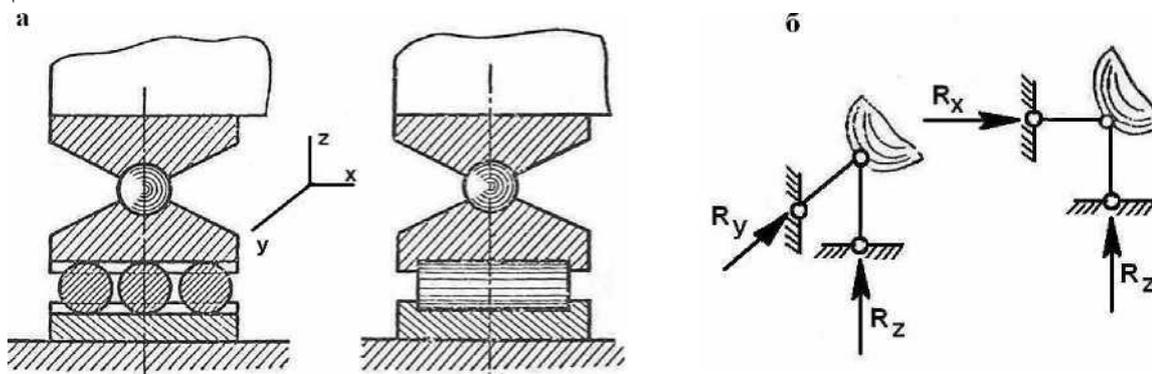


Рис.1.4. Кульова лінійно-рухома опора (а), умовне зображення (б)

Таким чином, кульова лінійно-рухома опора накладає на систему два зв'язки, які перешкоджають переміщенням вздовж осі, перпендикулярної до

площини кочення, і у напрямку осей котків. У такій опорі виникає реакція з двома складовими -  $Y_1, Y_2$  або  $Y_x, Y_2$  залежно від розташування котків (рис. 1.4,б).

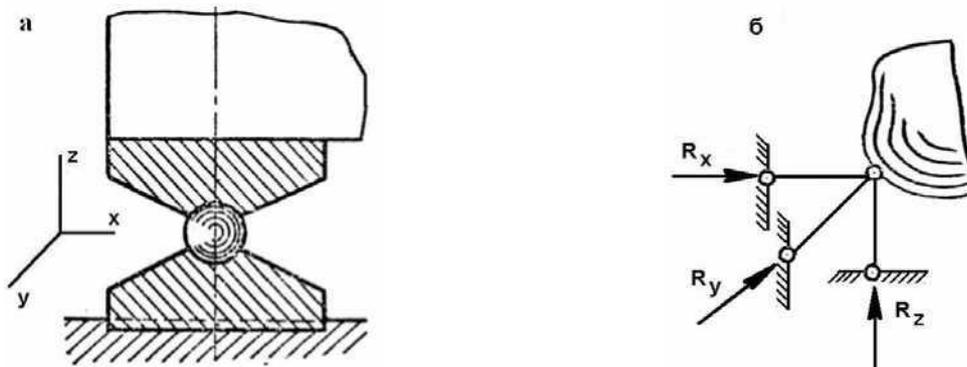


Рис.1.5. Кульова нерухома опора (а), умовне зображення (б)

Кульова нерухома опора (кульовий шарнір) показана на рис 1.5,а. Вона складається з двох балансирів із кулею між ними, яка входить у заглиблення. Нижній балансир, як і верхній, не рухається. Система з такою опорою можелише повертатися відносно трьох осей, тобто опора накладає три зв'язки на лінійні переміщення вздовж кожної осі. В опорі виникає реакція, яка проходить через центр ваги кулі і яку можна розкласти на складові  $Y_x, Y_y$ , (рис. 1.5,б).

Нерухома опора - затиснення жорстко з'єднує систему із землею (рис.1.6,а). Жорстка опора накладає шість зв'язків, які не дозволяють ні кутових, ні лінійних переміщень. В ній виникають три реактивних сили  $Y_x, Y_y$ , у напрямку координатних осей і три реактивних моменти  $M_x, M_y, M_z$  відносно осей (рис.1.6,б).

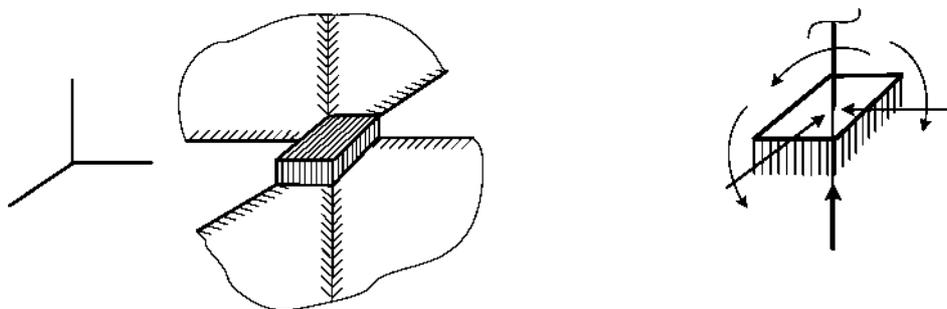


Рис.1.6. Жорстка нерухома опора (а), умовне зображення (б)

Жорсткі опори характерні для рамних просторових систем. Просторові ферми мають кульові опори.

Розрахунок будь-якої конструкції починається з кінематичного аналізу. Для цього визначається степінь вільності системи  $Ж$ , тобто співвідношення кількості степенів вільності усіх її частин і накладених зв'язків. Геометрично

незмінну окрему частину системи будемо називати блоком. Споруду можна представити як систему таких блоків, кожен з яких має шість степенів вільності. Блоки поєднуються між собою зв'язками у вигляді стержнів, шарнірів і кріпляться до іншої конструкції або до землі опорними зв'язками. Кульовий шарнір називається простим, якщо з'єднує два блоки. Він накладає на систему три зв'язки. Якщо кульовий шарнір поєднує  $n$  блоків, він називається багатократним. Його кратність дорівнює  $n-1$ .

Степінь вільності просторової системи  $\mathcal{J}$  визначається за формулою

$$\mathcal{J} = 6B - 3Ш - C_0, \quad (1.1)$$

де  $B$  - кількість геометрично незмінних блоків;

$Ш$  - кількість простих кульових шарнірів, що поєднують блоки, з урахуванням кратності;

$C_0$  - кількість опорних стержнів.

Степінь вільності просторової ферми можна визначити не тільки за формулою (1.1), а й за формулою для шарнірно-стержньових систем

$$W = 3B - C_\phi - C_0, \quad (1.2)$$

де  $B$  - кількість вузлів ферми;

$C_\phi$  - кількість стержнів ферми, що поєднують вузли;

$C_0$  - кількість опорних стержнів.

Умова геометричної незмінності має вигляд

$$W < 0. \quad (1.3)$$

Для статично визначеної геометрично незмінної системи степінь вільності повинен дорівнювати  $W = 0$ . Як і для плоских систем, умова (1.3) є необхідною, але недостатньою. Для остаточної оцінки геометричної незмінності обов'язковим є аналіз структури просторової системи, який полягає в перевірці наявності необхідної кількості зв'язків у кожній частині системи і правильності їх розташування. Найпростішою геометрично незмінною просторовою системою є трикутна піраміда (рис.1.7).

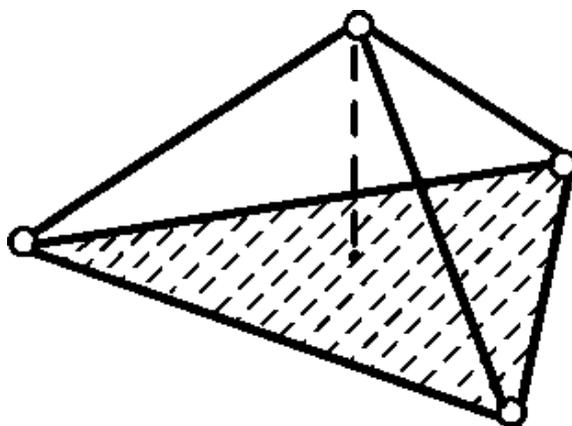


Рис.1.7. Трикутна піраміда

Нову геометрично незмінну просторову систему можна одержати приєднанням до неї нового вузла трьома стержнями, які не знаходяться в одній площині. Якщо система має вигляд многогранника з трикутними гранями, вона завжди задовольняє умовам геометричної незмінності і статичної визначеності. Така система називається сітчастою. Найменша кількість опорних зв'язків, необхідна для геометрично незмінного приєднання незмінної просторової системи до землі, повинна дорівнювати кількості рівнянь рівноваги споруди у просторі, тобто шести. У випадках, коли до землі приєднується змінна система, кількість опорних зв'язків має бути відповідно збільшена. Неправильне розташування зв'язків між блоками і опорних зв'язків може привести систему до миттєвої змінності або змінності при кінцевих переміщеннях. Основні правила правильного розташування зв'язків такі:

- Шість стержнів або їх осі не повинні перетинати одну пряму лінію. У противному разі ця пряма буде віссю нескінченно малого повороту одного блока відносно другого, що приведе до миттєвої змінності системи.
  - В одній точці не повинні перетинатися більш, ніж три стержні, оскільки чотири або більше стержнів, що перетинаються, зможуть знищити лише три степеня вільності. Інші два або один зв'язки не спроможні усунути решту степенів вільності.
  - Три стержні, які перетинаються в одній точці, не повинні знаходитись в одній площині, оскільки зможуть знищити тільки два степеня вільності.
- Проведемо кінематичний аналіз просторової ферми, наведеної на рис.1.8.

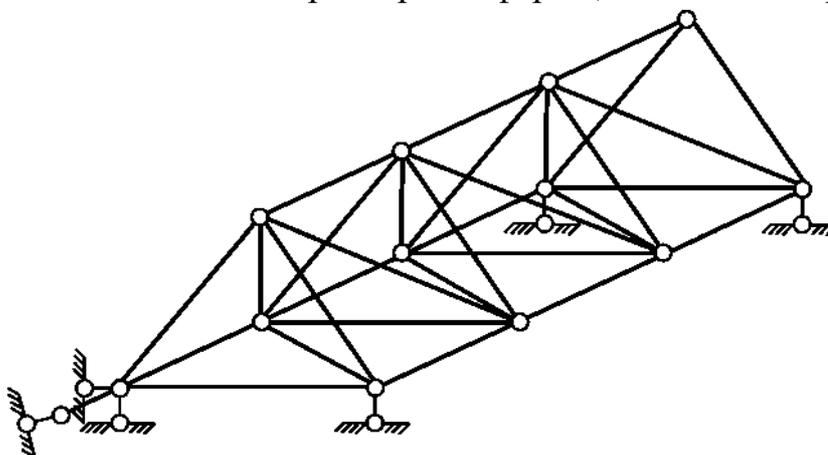


Рис. 1.8. Геометрично незмінна просторова ферма

Ферма має: вузлів  $B=12$ , стержнів  $S_f=30$ , опорних стержнів  $S_0=6$ . За формулою (1.2)  $\mathcal{J} = 3 \cdot 12 - 30 - 6 = 0$ .

Отже, ферма має достатню кількість зв'язків. Аналіз структури показує, що усі грані ферми представляють собою трикутники, тобто дана ферма є сітчастою. Вона прикріплена до землі шістьма опорними зв'язками, які розташовані правильно. Таким чином, ферму можна охарактеризувати як геометрично незмінну і статично визначену.

Ферма, показана на рис 1.9, має геометрично незмінну решітку і достатню кількість опорних зв'язків ( $B=8$ ,  $C_f=18$ ,  $C_0=6$ ,  $\mathcal{J} = 3 \cdot 8 - 18 - 6 = 0$ ).

Але аналіз структури показує, що система миттєво змінна, оскільки опорні зв'язки розташовані неправильно. Чотири вертикальні зв'язки (2, 3, 4, 6) паралельні, а вісі двох інших (1, 5) перетинаються у точці  $A$ . Пряма лінія  $m-m$ , яка проходить через точку  $A$ , є віссю обертання, відносно якої можливий нескінченно малий поворот всієї системи.

Оскільки  $\mathcal{J} = 0$ , система є геометрично незмінною і статично визначеною.

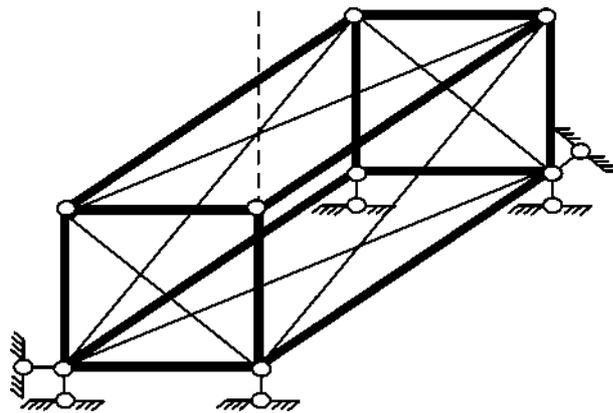


Рис.1.9. Миттєво змінна просторова ферма

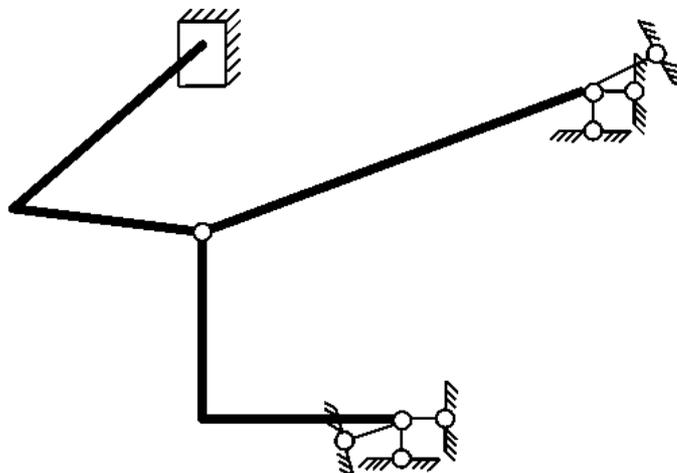


Рис.1.10. Просторова рама

## 2. Визначення зусиль у стержнях просторових статично визначених ферм

Просторовою фермою називається система прямолінійних стержнів, які не лежать в одній площині і з'єднуються у вузлах кульовими шарнірами.

Після кінематичного аналізу ферми знаходяться опорні реакції, для чого складаються шість рівнянь рівноваги: суми проекцій всіх сил на кожну вісь; суми моментів сил відносно осей:

$$\Sigma x = 0; \Sigma y = 0; \Sigma z = 0; \Sigma M_x = 0; \Sigma M_y = 0; \Sigma M_z = 0. \quad (2.1)$$

При вузловому навантаженні ферми у стержнях виникають лише поздовжні зусилля (розтяг або стиск).

Для визначення зусиль у стержнях статично визначених просторових ферм застосовуються методи вирізування вузлів, простих і сумісних перерізів, заміни стержнів, розкладання просторової ферми на плоскі.

*Метод вирізування вузлів.* Спочатку розглядається вузол, що поєднує не більше трьох стержнів, які не знаходяться в одній площині. У розрізаних стержнях показуються додатні поздовжні зусилля (направляються від вузла), прикладається зовнішнє навантаження, записуються суми проекцій всіх сил на координатні осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , або на вісь, перпендикулярну одному або двом з трьох стержнів. Розв'язується система рівнянь відносно шуканих зусиль. Далі розглядаються решта вузлів у такому порядку, щоб вузол не мав більше трьох невідомих. Для полегшення розрахунку слід попередньо встановити стержні, зусилля у яких дорівнюють нулю. Це можна зробити на основі часткових випадків рівноваги вузлів:

- якщо у не навантаженому вузлі сходяться три стержні, які не лежать в одній площині, зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю;
- якщо у вузлі всі стержні, крім одного, лежать в одній площині і зовнішнє навантаження прикладене в тій самій площині, зусилля у розташованому окремо стержні дорівнює нулю.

Можливість знайти зусилля у всіх стержнях методом вирізування вузлів залежить від геометричної структури ферми. Крім того, слід зазначити, що при переході від вузла до вузла поступово накопичується похибка обчислень.

*Метод наскрізних перерізів.* Застосовується у тому випадку, коли просторову ферму можна розсікти площиною на дві частини так, щоб вона перерізувала не більше шести стержнів, зусилля в яких невідомі. Розглядається одна з відсічених частин ферми. Показуються додатні поздовжні зусилля у розсічених стержнях, прикладається зовнішнє навантаження. Для визначення зусиль складаються шість рівнянь рівноваги: суми проекцій всіх сил на осі та суми моментів відносно осей. Осі слід вибирати так, щоб частина невідомих зусиль не проектувалася на них і не складала моментів відносно осей. Метод перерізів рекомендується для ферм з достатньо простим утворенням.

Ефективність застосування методів вирізування вузлів і перерізів покажемо на прикладі визначення зусиль у стержнях консольної ферми

(рис.2.1), яка прикріплена шістьма опорними зв'язками у точках  $A, B, C$  до нерухомої площини  $K$ .

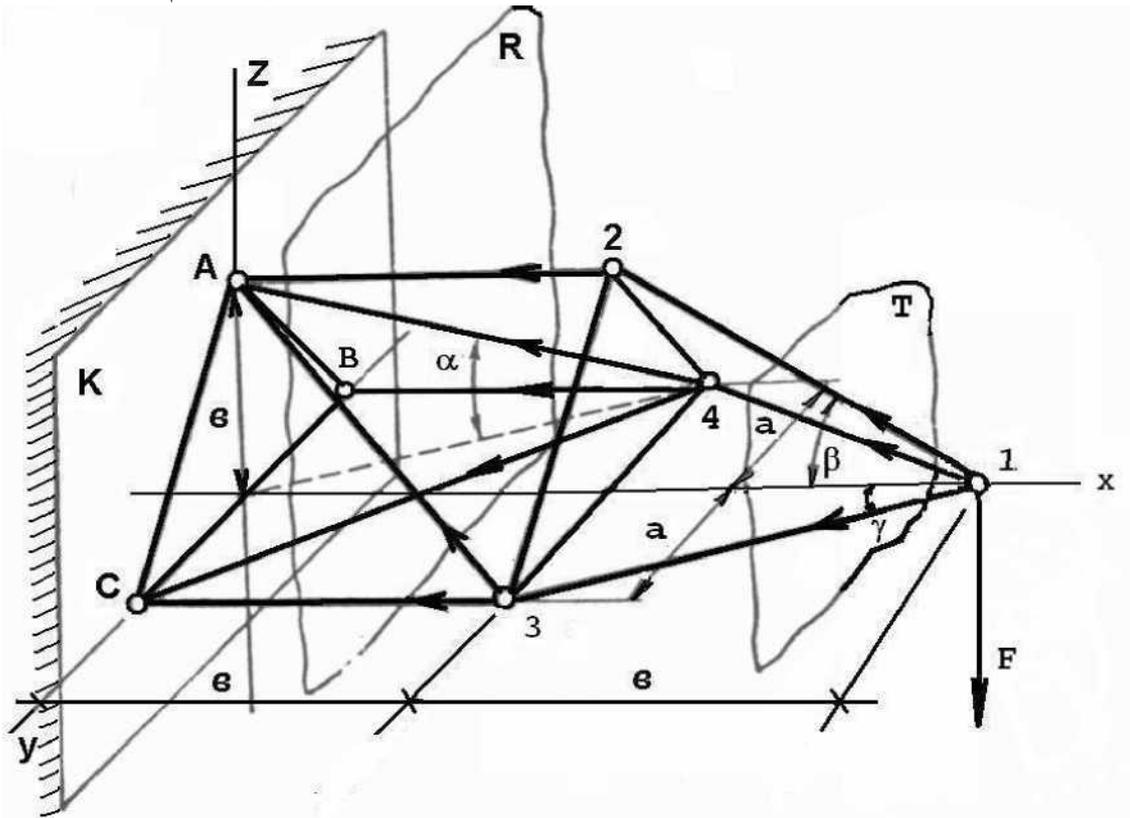


Рис.2.1. Просторова консольна ферма

У даному випадку реакції опор можна не шукати, оскільки зручніше буде розглядати рівновагу вільної правої частини ферми. Для визначення зусиль у розкосах  $NA_{-3}$ ,  $NA_{-4}$  використаємо метод перерізів. Розріжемо ферму площиною  $R$ , яка перетинає шість стержнів:  $C-3$ ,  $C-4$ ,  $A-3$ ,  $A-4$ ,  $B-4$ ,  $A-2$ . Запишемо суму проєкцій сил правої частини ферми на вісь  $z$ :

$$\Sigma Z = -F + (N_{A-3} + N_{A-4}) \sin a = 0. \quad (2.1)$$

Решта зусиль у перерізі не проєктуються на вертикальну вісь. Для одержання другого рівняння складемо суму моментів сил правої частини відносно осі  $x$ :

$$\Sigma M_x = N_{A-4} \cdot a \sin a - N_{A-3} \cdot a \sin a = 0. \quad (2.2)$$

З цього рівняння слідує, що  $N_{A-4} = N_{A-3}$ . Тоді з (2.1) маємо:

$$N_{A-4} = N_{A-3} = F / (2 \sin a). \quad (2.3)$$

Для визначення зусилля  $N$  скористаємося теж методом перерізів

(площина  $R$ ) і запишемо суму моментів сил правої частини відносно осі  $y$ . До цього рівняння крім шуканого зусилля надійдуть зусилля у розкосах  $N_{1.4}$ ,  $N_{1.3}$ , які вже відомі.

Аналогічно можна знайти зусилля у решті стержнів, перерізаних площиною  $R$ .

Для визначення зусиль у стержнях  $1-2$ ,  $1-4$ ,  $1-3$  розглянемо рівновагу вузла  $1$ . Переріжемо стержні площиною  $T$  і запишемо рівняння рівноваги вузла  $1$ . Зусилля  $N_{1.2}$  знайдемо з рівняння нулю суми проекцій сил на вісь  $z$ :

$$Dz = -F + N_{1.2} \cdot \sin \varphi = 0. \quad (2.6)$$

Маємо:

$$N_{1-2} = F / \sin p. \quad (2.7)$$

Для визначення зусиль  $N_{1-3}$ ,  $N_{1-4}$  необхідно скласти два рівняння - суми проекцій сил на осі  $x$ ,  $y$ .

$$Dy = N_{1.4} \sin y - N_{1.3} \sin y - 0.$$

Звідки:

$$N_{1-4} = N_{1-3}. \quad (2.8)$$

$$Dx = -N_{1.4} \cos y - N_{1.3} \cos y - N^2 \cos p = 0. \quad (2.9)$$

Після підстановки залежностей (2.7, 2.8) і перетворень будемо мати  $N_{1-3} = N_{1-4} = -F / (2 \operatorname{tg} p \cos y)$ . (2.10)

*Метод заміни стержнів.* Цей метод застосовується для визначення зусиль у стержнях ферм зі складною решіткою. Складна ферма спрощується усуненням одного або декількох стержнів із додаванням інших стержнів у других місцях з умовою зберігання геометричної незмінної. Усувати стержень необхідно так, щоб з'явилася можливість для застосування методів вирізування вузлів або перерізів. Стержень, який усувається, називають заміненним, а новий стержень - замінюючим. Простішим для розрахунку є варіант, коли достатньо замінити один стержень. Зусилля у заміненому стержні позначається через  $x$ . Таким чином, одержують більш просту ферму, яка знаходиться під дією зовнішнього навантаження і зусилля  $x$  у заміненому стержні.

Далі визначається зусилля у замінюючому стержні окремо від зовнішнього навантаження  $N_F$  і окремо від зусилля  $x$  у заміненому стержні  $N_x$ . Спочатку знаходиться зусилля в замінюючому стержні від  $x = 1$ . Воно позначається  $N_x$ . Тоді зусилля  $N_x = N_x \cdot x$ . Повне зусилля у замінюючому стержні дорівнює  $N_F + N_x \cdot x$ . Але в заданій фермі замінюючий стержень не існує і тому зусилля в ньому можна прирівняти до нуля. Маємо:

$$N_F + N_x x = 0. \quad (2.11)$$

З рівняння (2.11) визначається зусилля у заміненому справжньому стержні:

$$x = -N_F / N_x. \quad (2.12)$$

Знаючи зусилля  $x$ , можна знайти зусилля  $N_K$  у решті стержнів за залежністю

$$N_K = N_{KF} + N_{Kx} \cdot x, \quad (2.13)$$

де  $N_{KF}$  - зусилля у  $k$ -му стержні від зовнішнього навантаження;

$N_{Kx}$  - зусилля у  $k$ -му стержні від  $x = 1$ .

Аналогічно проводиться розрахунок складних ферм і тоді, коли приходится замінювати декілька стержнів. Але у цьому випадку для визначення зусиль у замінюючих стержнях необхідно скласти і розв'язувати систему рівнянь, кількість яких повинна дорівнювати кількості невідомих.

Покажемо застосування методу заміни стержнів до розрахунку просторової ферми, яку наведено на рис.2.2,а.

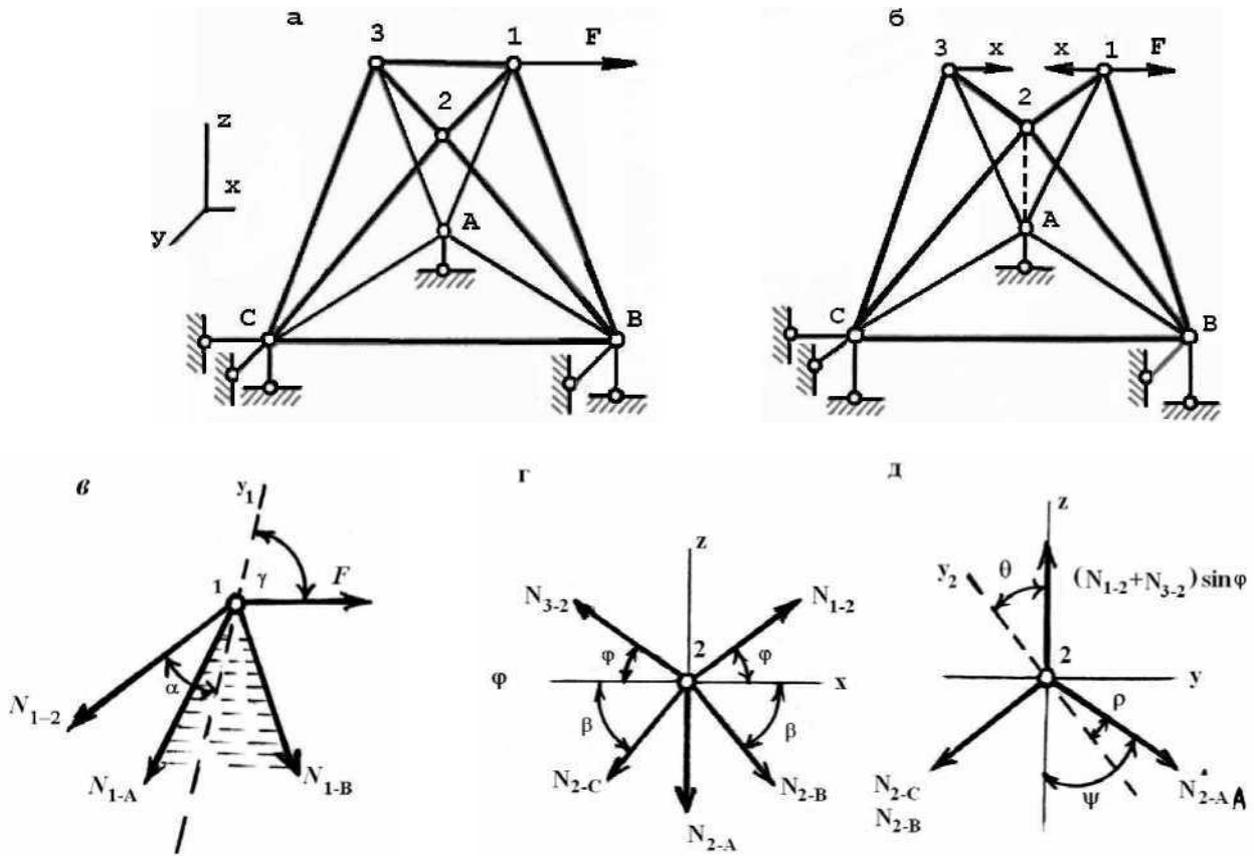


Рис.2.2. Просторова ферма зі складною решіткою (а), спрощена ферма (б), вузол 1 спрощеної ферми (в), фронтальний вигляд вузла 2 спрощеної ферми (г), боковий вигляд вузла 2 (д)

Для спрощення розрахункової схеми усунемо стержень 3-1 (замінений стержень) і введемо замінюючий стержень 2-А (рис.2.2,б). При цьому в спрощеній схемі (рис.2.2,б) з'являються вузли 1,3, які поєднують тільки по три стержні, що дає можливість для застосування методу вирізування вузлів. Для визначення зусилля у замінюючому стержні 2-А необхідно послідовно розглянути рівновагу вузлів 1, 3, 2 при дії зовнішнього навантаження А і при дії зусилля  $x = 1$  у заміненому стержні.

Визначимо зусилля у замінюючому стержні від зовнішнього навантаження. Спочатку розглянемо рівновагу вузла 1 (рис.2.2,в) спрощеної ферми. Стержні 1-А, 1-В знаходяться в площині А,1,В, стержень 1-2 - у вертикальній площині 3,2,1. Запишемо суму проєкцій сил на вісь  $y_1$ , проведену перпендикулярно площині А,1,В

$$\Sigma y_1 = -N_{1-2} \cos \alpha + F \cos \gamma = 0, \quad (2.14)$$

звідки

$$N_{1-2} = F \cos \gamma / \cos \alpha. \quad (2.15)$$

Розглядаючи рівновагу незавантаженого вузла 3, приходимо до висновку, що  $N_{3-2} = 0$ .

Далі переходимо до вузла 2, фронтальний та боковий вигляди якого показано на рис.2.2,г, рис.2.2,д. Стержні 2-С і 2-В знаходяться у нахиленій площині С,2,В, стержні 2-3, 2-1 - у вертикальній площині 3,2,1, замінюючий стержень

2-А- відхилений від вертикальної осі z на кут  $\alpha$ . Проведемо вісь  $y_2$ , перпендикулярну площині С,2,В, запишемо суму проєкцій сил на цю вісь. При цьому врахуємо, що від зовнішнього навантаження зусилля  $N_{2-3} = 0$

$$N_{2-3} \sin \alpha - N_{2-А} \cos \alpha - N_{2-В} \cos \alpha = 0. \quad (2-16)$$

Після підстановки (2.15) у (2.16) маємо:

$$N_{2-А} = N_{2-3} \sin \alpha - N_{2-В} \cos \alpha = F \cos \alpha - N_{2-В} \cos \alpha. \quad (2-17)$$

Таким самим чином визначається зусилля  $N_{2-А}$  від  $x = 1$ . Необхідно тільки врахувати, що, крім вузла 1, слід спочатку розглянути вузол 3 для визначення  $N_{3-2}$ . Оскільки система симетрична, зусилля  $N_{3-2}$  і  $N_{1-2}$  однакові і дорівнюють

$$N_{3-2} = N_{1-2} = \frac{F}{\cos \alpha}. \quad (2-18)$$

З рівноваги вузла 2 одержимо:

$$N_{2-3} \sin \alpha + N_{2-1} \sin \alpha - N_{2-А} \cos \alpha = 0. \quad (2-19)$$

Враховуючи (2.18), маємо:

$$N_{2-А} = -2 \frac{F}{\cos \alpha} \sin \alpha = -2F \tan \alpha. \quad (2-20)$$

Запишемо сумарне зусилля у замінюючому стержні 2-А і прирівняємо його до нуля за (2.11).

$$F \sin \alpha - N_{2-А} \cos \alpha - (2F \tan \alpha \cos \alpha) = 0$$

$$N_{2-А} = F \tan \alpha. \quad (2-21)$$

*Метод розкладання просторової ферми на плоскі.* Застосування цього методу можливе тоді, коли просторова ферма складається з окремих плоских геометрично незмінних ферм. Розкладання засновано на такій теоремі: якщо на плоску ферму, яка входить в просторову, діє в її площині врівноважене зовнішнє навантаження, або навантаження, врівноважене реакціями опор плоскої ферми, поздовжні зусилля будуть виникати тільки у стержнях цієї плоскої ферми. Зусилля у решті стержнів просторової ферми дорівнюватимуть нулю. При довільному напрямку зовнішньої сили у вузлі просторової ферми, її слід розкласти на складові, кожна з яких буде діяти в площині тієї чи іншої плоскої ферми. Кожна плоска ферма розраховується на своє навантаження. Зусилля у стержнях, які належать суміжним плоским фермам, визначаються алгебраїчним складанням зусиль, одержаних при розгляданні цих плоских ферм окремо.

Розглянемо просторову двосхилу ферму, завантажену горизонтальними силами (рис.2.3,а). Розкладемо задані сили на осі, направлені вздовж схилів ферми (рис.2.3,б). Тоді задача зводиться до розрахунку двох плоских ферм, кожна з яких навантажена відповідними складовими зовнішніх сил (рис.2.4, а, б). Зусилля у стержнях плоских ферм визначаються методами вирізування вузлів і перерізів.

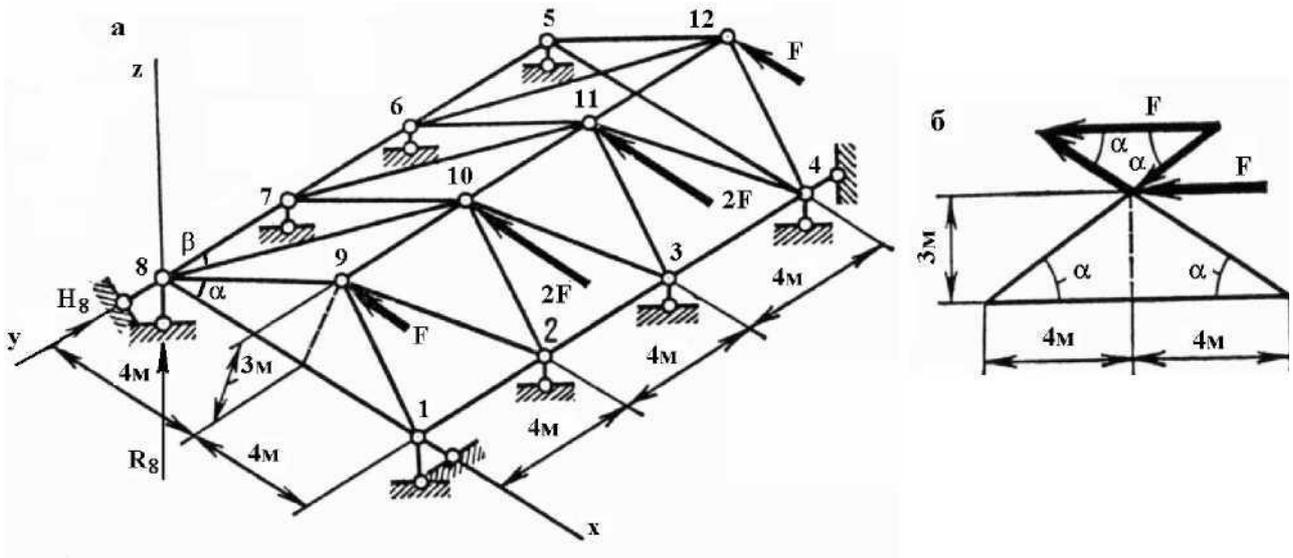


Рис.2.3. Просторова двосхила ферма (а), розкладання зовнішньої сили на складові(б)

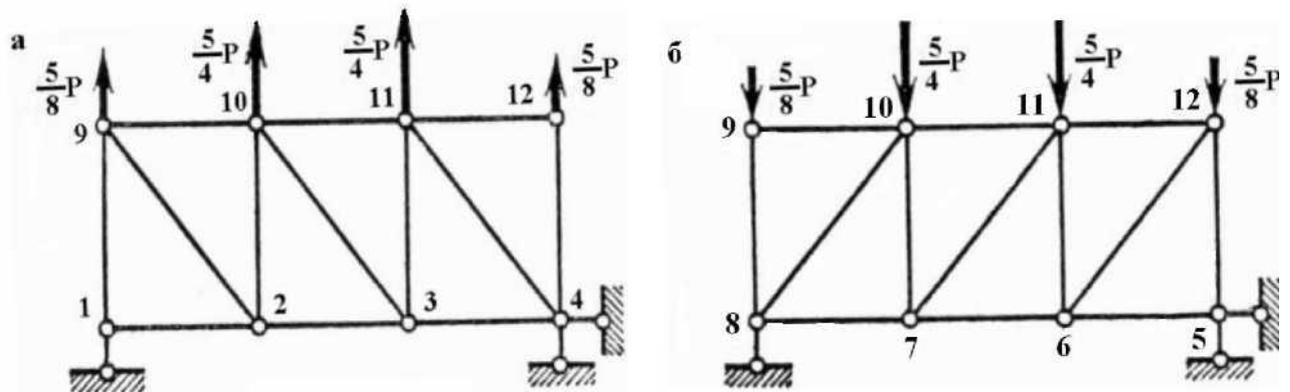


Рис. 2.4. Права (а) та ліва (б) плоскі ферми, з яких складається просторова система

Результати розрахунку наведені в табл. 2.1.

Зусилля у стержні 8-1 можна знайти з умови рівноваги вузла 8. Запишемо суму проекцій всіх сил у вузлі на вісь x.

$$E_x = N_{8_9} \cos \alpha + N_{g_{10}} \sin \beta \cdot \cos \alpha + N_{i_8} = 0. \quad (2.22)$$

Після підстановки значень  $N_{g_9}$ ,  $N_{g_{10}}$  (табл.2.1) одержимо  $N_{g_8} = 3F/2$ . Таким самим чином визначається зусилля у стержні 4-5. Воно теж дорівнює  $N_{4_5} = 3F/2$ .

Стержні 9-10, 10-11, 11-12 належать обом плоским фермам, тому зусилля в них дорівнюють сумі зусиль, одержаних при розрахунку кожної ферми окремо. Усі значення зусиль зведені у таблицю 2.1.

Таблиця 2.1.

## Значення зусиль у стержнях просторової двосхилої ферми

№ п/п	Номер стержня	Зусилля	Номер стержня	Зусилля	Номер стержня	Зусилля
1	2	3	4	5	6	7
1	1-2	0	4-11	1,6F	7-11	0
2	2-3	-F	7-8	F	6-12	1,6F
3	3-4	-F	6-7	F	9-10	F
4	1-9	15F/8	5-6	0	10-11	0
5	2-10	1,25F	8-9	-5F/8	11-12	-F
6	3-11	0	7-10	0	1-8	3F/2
7	4-12	5F/8	6-11	-1,25F	4-5	3F/2
8	9-2	-1,6F	5-12	-15F/8		
9	3-10	0	8-10	-1,6F		

Для визначення опорних реакцій можна розглянути рівновагу опорних вузлів. Запишемо рівняння  $Dz = 0$ ,  $Dy = 0$  для вузла 8:

$$Dz = R_8 + N_{8-9} \sin a + N_{8-10} \sin \varphi \cdot \sin a = 0, \text{ звідки після}$$

підстановки значень зусиль у стержнях маємо:

$$R_8 = -N_{8-9} \sin a - N_{8-10} \sin \varphi \cdot \sin a = 9F/8. \quad (2.23)$$

$$Dy = H_8 + N_{8-7} + N_{8-10} \cos \varphi = 0.$$

З урахуванням значень  $N_{8-7}$ ,  $N_{8-10}$  одержимо

$$H_8 = -N_{8-7} - N_{8-10} \cos \varphi = 0. \quad (2.24)$$

Аналогічно визначається решта опорних реакцій.

## 2. Розрахунок просторових статично визначених рам

Розрахунок просторової рами починається з оцінки її геометричної незмінності, для чого можна застосувати формулу (1.1). Для визначення опорних реакцій складаються рівняння рівноваги. У загальному випадку в стержнях просторової рами виникають шість внутрішніх зусиль: згинальні моменти  $M_z$ ,  $M_y$ , крутний момент  $M_x$  ( $M_{KP}$ ), поперечні сили  $Q_y$ ,  $Q_z$ , поздовжня сила  $N_x$  (рис.3.1).

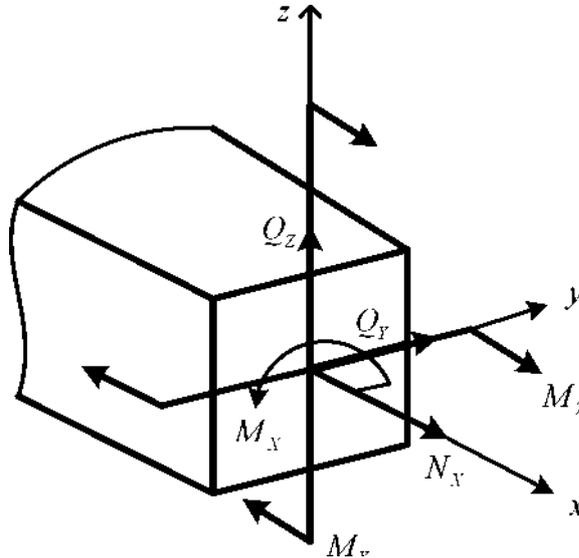


Рис.3.1. Внутрішні зусилля в стержнях просторової рами

Як і для плоских рам, визначення цих зусиль виконується методом перерізів. Так, наприклад, згинальний момент  $M_z$  в перерізі дорівнює сумі моментів усіх сил, прикладених до однієї з відокремлених частин рами, відносно осі  $z$ . Поперечна сила  $Q_z$  в перерізі дорівнює сумі проєкцій усіх сил, прикладених до однієї з відокремлених частин рами, на вісь  $z$ , перпендикулярну до осі стержня. Поздовжня сила  $N_x$  є сумою проєкцій усіх сил, прикладених до однієї з відокремлених частин рами, на вісь стержня (вісь  $X$ ). Правила знаків внутрішніх зусиль просторової рами такі самі, як і при розрахунку плоскої рами. Епюри згинальних моментів  $M_y$ ,  $M_z$  будуються на розтягнутому волокні. Знак на цих епюрах не ставиться. Крутний момент  $M_{KP}$  будемо вважати додатним, якщо при погляді з торця зовнішня сила або момент направлені відносно осі стержня за годинниковою стрілкою. При записі рівнянь внутрішніх зусиль рекомендується показати для кожного стержня рами координатні осі так, щоб вісь  $X$  була направлена вздовж стержня.

Розглянемо просторову, жорстко закріплену в точці  $K$  раму-консоль (рис. 3.2).

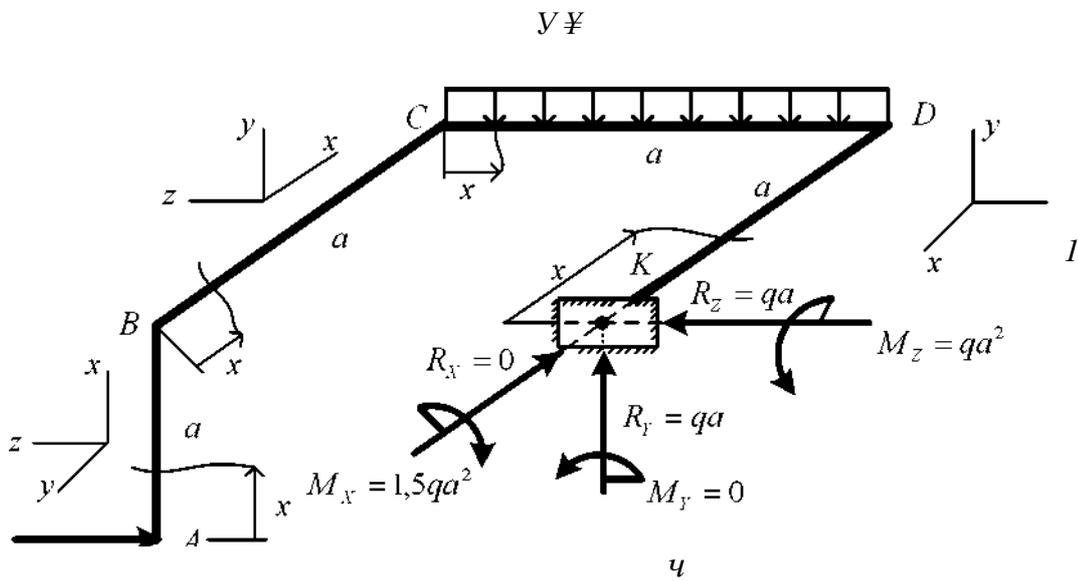


Рис. 3.2. Розрахункова схема просторової рами - консолі

Складемо рівняння рівноваги для визначення опорних реакцій (3.1), хоча у даному випадку це не обов'язково, оскільки рівняння внутрішніх зусиль можна записувати з вільного кінця рами. Індeksi реакцій відповідають позначенням осей для стержня KB.

$$\begin{aligned}
 E y = Y_{\bar{y}} - c a = 0; \quad E x = Y_x = 0; \quad E i = \bar{y} - Y_2 = 0; \\
 E M_{\bar{y}} = M_{\bar{y}} = 0; \quad E M_x = M_x - \bar{y} a - c a^2 / 2 = 0; \\
 E M_2 = -M_2 + c a^2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Значення і напрямки реакцій показані на рис.3.2. Запишемо рівняння внутрішніх зусиль на ділянках, границями яких є точки прикладення зовнішнього навантаження і вузли рами. При записі рівнянь згинальних моментів  $M_{\bar{y}}$ ,  $M_2$  будемо дивитися на стержні AB, BC, KB справа, а на стержень CB як на звичайну балку, враховуючи все, що є по один бік від перерізу.

Ділянка AB ( $0 < x$ )  
 Ділянка BC ( $0 < X < a$ ).

У даному випадку записати рівняння внутрішніх зусиль буде простіше через опорні

реакції.

$$M_y = Y_2 l = \bar{y} a * X_{x=0} = 0 \quad M_{KB} = 1,5 \bar{y} a^2$$

Епюри внутрішніх зусиль показані на рис.3.3 ^ 3.6.

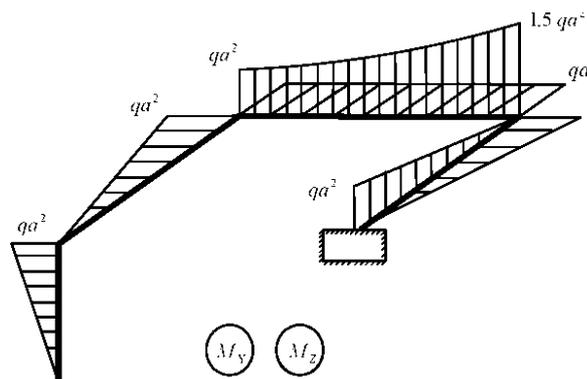


Рис.3.3. Епюри згинальних моментів  $M_y$ ,  $M_z$  для просторової рами-консолі

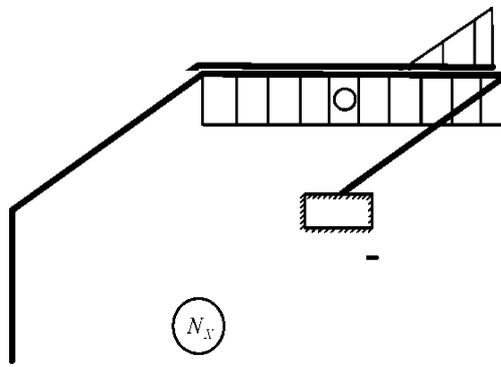
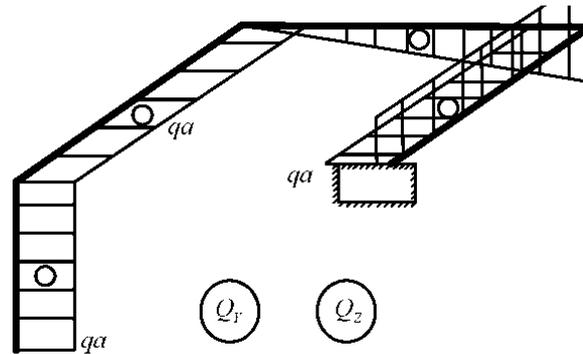


Рис. 3.4. Епюра крутних моментів  $M_{KP}$  для просторової рами-консолі

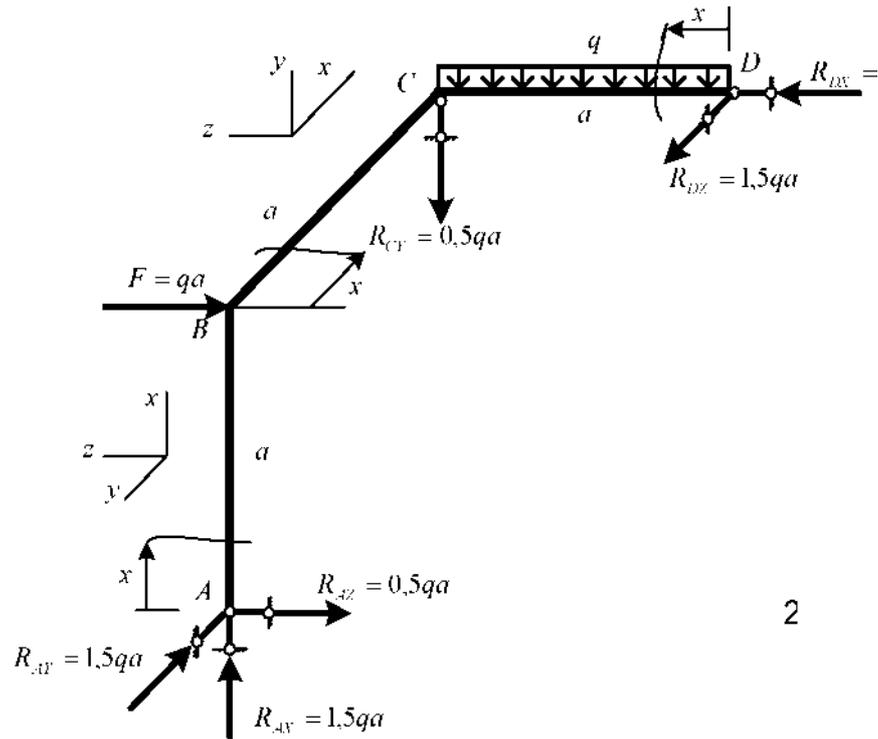


Перевірка правильності побудови епюр виконується за рівновагою вузлів.

Розглянемо вузол  $D$ , прикладемо внутрішні зусилля (рис. 3.7). \_\_\_\_\_



Розглянемо просторову раму, шарнірно закріплену в точках  $A$ ,  $C$ ,  $B$  (рис.3.8). Кожна з ділянок рами  $AB$ ,  $BC$ ,  $CB$  має свої координатні осі для зручності запису рівнянь внутрішніх зусиль.



2

Рис. 3.8. Розрахункова схема просторової шарнірно закріпленої рами

У даному випадку визначення опорних реакцій є обов'язковим. Позначимо реакції двома індексами. Перший з них збігається з позначенням опори (A, B, C), другий залежить від осі (x, y, z) на тій ділянці, де знаходиться опора.

Запишемо суми проекцій всіх сил на осі  $x_3, y_3, z_3$  (осі ділянки CB) та суми моментів відносно осей  $y_2, z_2$ .

$$\sum F_{x3} = Y - Y_{Bx} + Y_{Cz} = \partial a - Y_{Bx} + Y_{Cz} = 0;$$

$$\sum F_{y3} = -E - \partial a + Y_{Cz} = 0;$$

$$\sum F_{z3} = Y_{Cz} - Y_{Bz} = 0;$$

1

$$\sum M_{i2} = Y_{Cz} \cdot a - Y_{Bz} \cdot a = 0 \text{ (вісь } y_2 \text{ проходить через точку B);}$$

$$\sum M_{i1} = \partial \cdot a \cdot a/2 + Y_{Cz} \cdot a - Y_{Bz} \cdot a = 0 \text{ (вісь } y_1 \text{ проходить через точку A);}$$

$$\sum M_{i3} = \partial \cdot a \cdot a + Y_{Cz} \cdot a - Y_{Bz} \cdot a = 0 \text{ (вісь } z_1 \text{ проходить через точку A). (3.6)}$$

Дійсний напрямок реакцій та їх значення показано на рис.3.8

Запишемо рівняння внутрішніх зусиль на кожній ділянці.

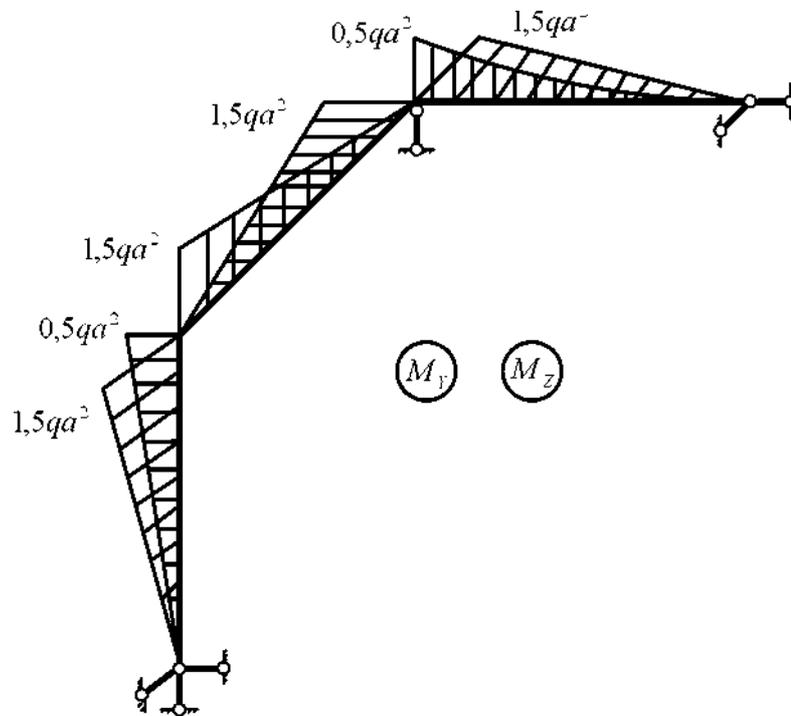


Рис. 3.9. Епюра згинальних моментів  $M_y$ ,  $M_z$  для просторової шарнірно закріпленої рами

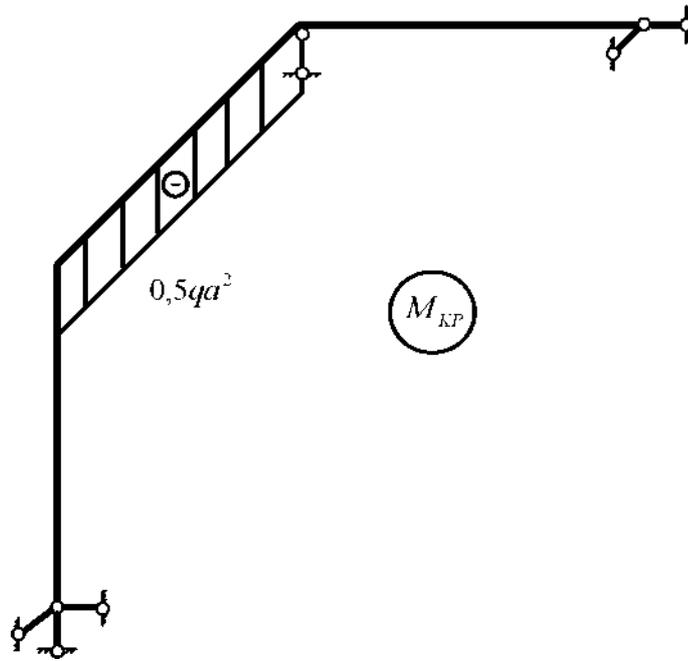


Рис.3.10. Епюра крутних моментів  $M_{кр}$  для просторової шарнірно закріпленої рами

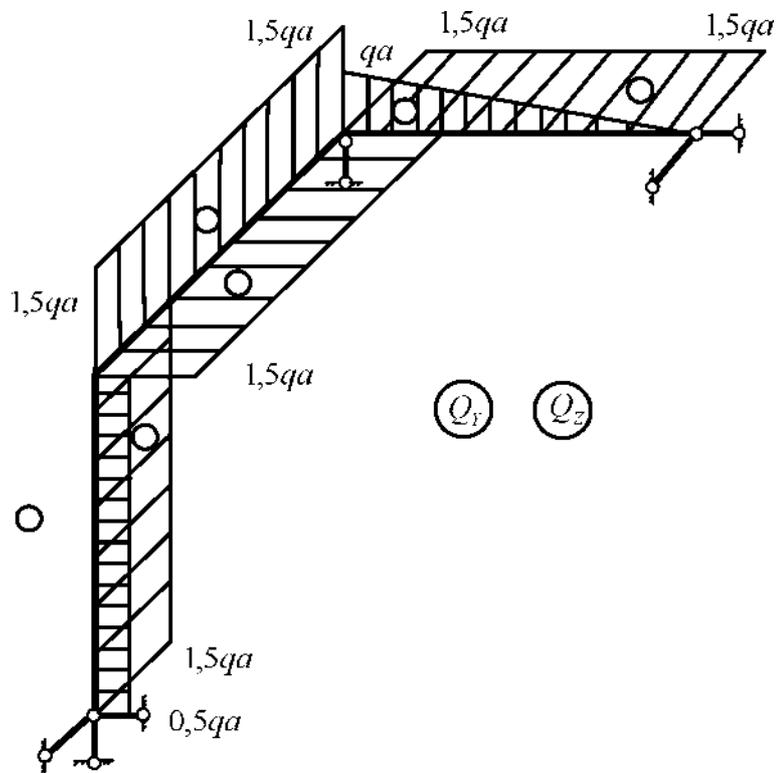


Рис. 3.11. Епюра поперечних сил  $Q_y$ ,  $Q_z$  для просторової шарнірно закріпленої рами

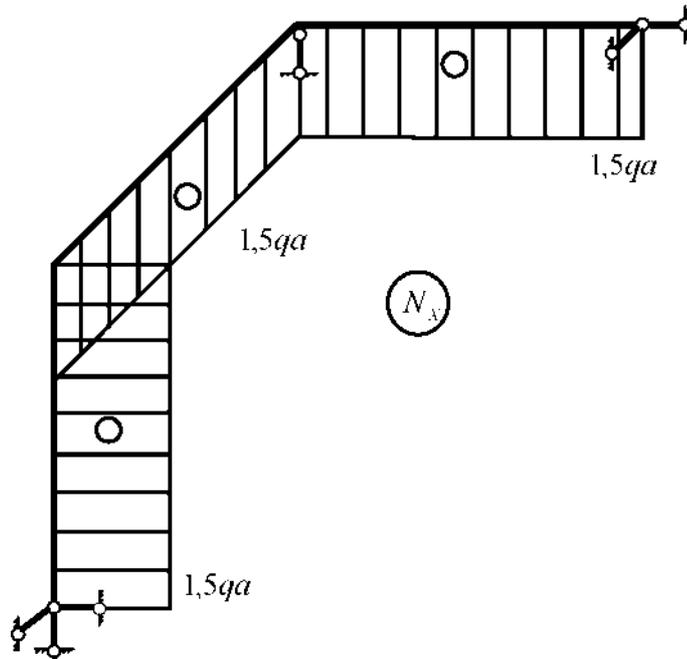


Рис. 3.12. Епюра поздовжніх сил  $N$  для просторової шарнірно закріпленої рами  
 Перевіримо рівновагу вузла  $C$  (рис 3.13).

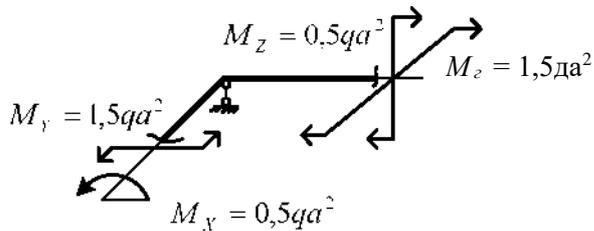


Рис. 3.13. Вузол  $C$  шарнірно закріпленої рами з прикладеними моментами (а), поперечними і поздовжніми силами (б)

Вузол  $C$  знаходиться у стані рівноваги, оскільки сума моментів відносно осей і суми проєкцій сил  $P$  і  $N$  на осі дорівнюють нулю. Рівновагу вузла  $B$  пропонується розглянути самостійно.

поперечними і поздовжніми силами (б) \_\_\_\_\_

#### 4.Завдання для самостійної роботи „Розрахунок просторової статично визначеної рами”

Для заданої просторової рами (табл. 4.1., рис 4.1.) побудувати епюри згинальних моментів  $M_T$ ,  $M_G$ , крутних моментів  $M_{кр}$ , поперечних сил  $Q_Y$ ,  $Q_Z$ , поздовжніх сил  $M_x$ .

Таблиця 4.1.

Дані до розрахунку просторових рам

Номер варіанту	a , м	кН/м	P, кН
1	1	2	8
2	2	1	4
3	1,5	2	5
4	1,8	2	6
5	1,4	4	5
6	1	8	14
7	1,6	5	10
8	2	2	3
9	2,2	1	5
10	1,4	3	15
11	1,6	4	12
12	1,8	3	3
13	1	3	6
14	1,2	6	14
15	1,6	10	2
16	2	1	8
17	2,2	1	10
18	1,5	4	6

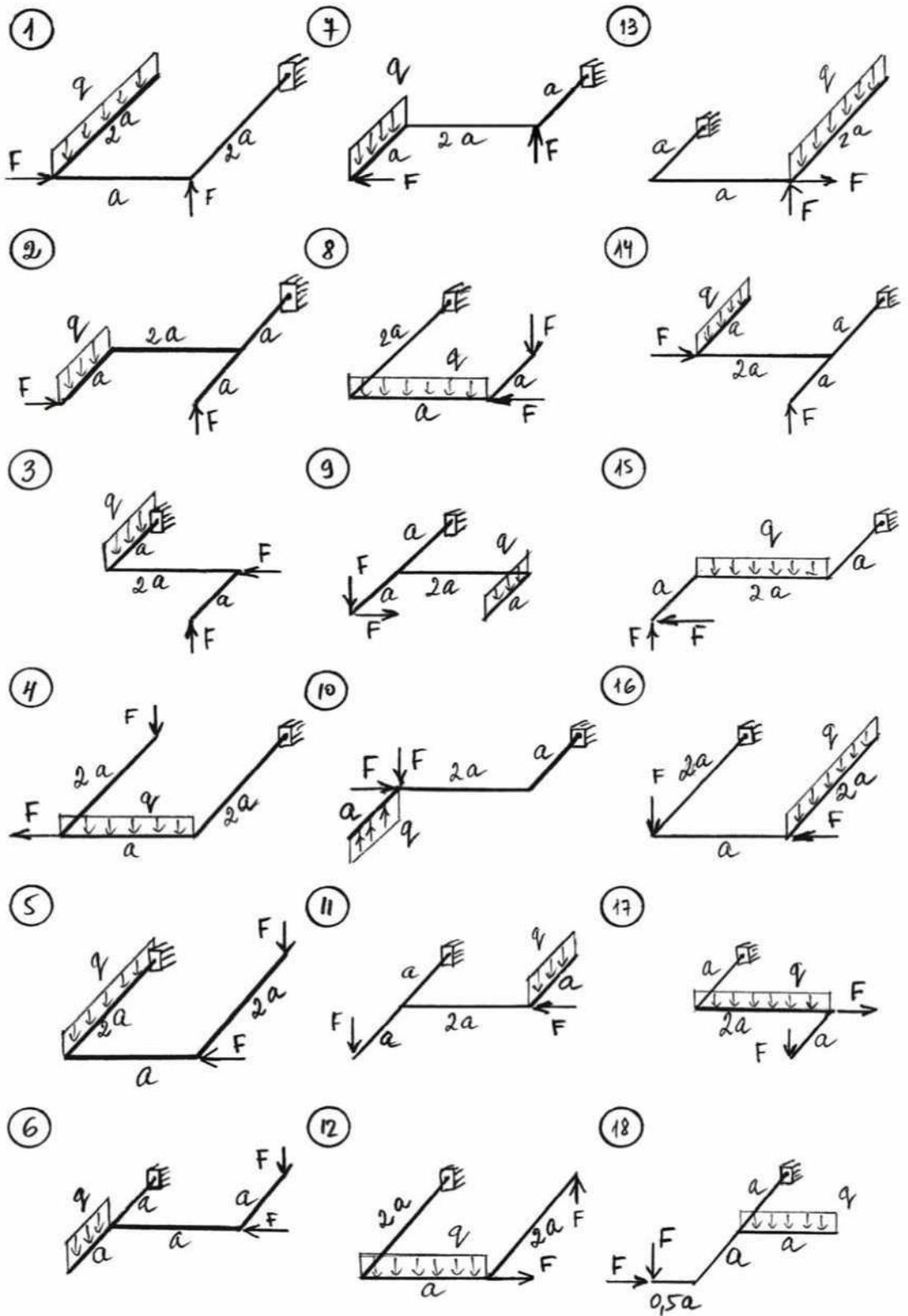


Рис. 4.1. Схеми просторових рам до самостійної роботи

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. А.В. Дарков, Г.К. Клейн, В.И. Кузнецов и др. Строительная механика. - М.: ВШ, 1976. - 600с.
2. Д.И. Бутенко, Н.А. Засядько, С.Н. Кан и др. Строительная механика. - К.: ВШ, 1989. - 479с.
3. Н.К. Снитко. Строительная механика. - М.: ВШ, 1980. - 431с.
4. В.А. Киселев. Строительная механика. - М.: Стройиздат, 1976. - 511с.
5. И.М. Рабинович. Основа строительной механики стержневых систем. - М.: Госиздат литературы по строительству и архитектуре, 1956. - 454с.
6. Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М.Г. Ванюшенков и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). - М.:ВШ, 1980. - 384с.

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Загальні поняття. Опори просторових систем. Кінематичний аналіз .....	5
2. Визначення зусиль у стержнях просторових статично визначених ферм.....	11
3. Розрахунок просторових статично визначених рам .....	18
4. Завдання для самостійної роботи „ Розрахунок просторової статично визначеної рами ” .....	26
Список літератури.....	28

Будівельна механіка [Текст]: Методичні вказівки до виконання самостійної роботи для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19 Архітектура і будівництво спеціальності (G Інженерія, виробництво та будівництво) 192 Будівництво та цивільна інженерія (G19 Будівництво та цивільна інженерія) освітньо-професійної програми Будівництво та експлуатація будівель і споруд денної форми навчання / уклад. О.Ф. Шмаль. – Любешів : ВСП «Любешівський технічний фаховий коледж Луцького НТУ», 2025. – 28 с.

Комп'ютерний набір і верстка :

О.Ф. Шмаль

Редактор:

О.Ф. Шмаль

Підп. до друку \_\_\_\_\_ 2025р. Формат А4.

Папір офіс. Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. 3,5

Обл. вид. арк. 3,4. Тираж 15 прим.